

מזרחי עברק
תכונות - קירובים דיוסנטיים ושברים מסועפים

משפט דיריכלה - לכל $x \in \mathbb{R}$ ו- $\epsilon > 0$ קיים $p_n/q_n \in \mathbb{Q}$ כך ש- $|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{\epsilon}{q_n^2}$

משפט עובדיס - נניח ש- $x \in \mathbb{R}$ איננו מסדק, כלומר $d=1$ ו- $d > 1$ אז $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ו- $\frac{p}{q} \neq x$ מתקיים $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^d}$ ו- $\frac{p}{q} \neq x$ מתקיים $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^2}$

$$\frac{c}{q_n^2} \leq |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2} \quad d=2$$

↑ ↑
עובדיס דיריכלה

שברים מסועפים: $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $1 \leq i \leq n$, $a_i \in \mathbb{N}$, $a_0 \in \mathbb{Z}$

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}, \quad n = \infty$$

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \quad \text{כאשר}$$

(*) הוכחנו: לכל $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ יש $a_0, a_1, a_2, \dots$ כך ש- $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$

$$\frac{p_0}{q_0} < \dots < \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} < \frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} < \dots < x < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \dots < \frac{p_1}{q_1}$$

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

וכאובן מהרצאה יחידה.

ראינו ש: $\{(a_0, \dots, a_n) : n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}, i \geq 1\} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$(a_0, \dots, a_n) \mapsto [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

ראינו שהצורה זו היא של 1-2-1. כלומר $x \in \mathbb{Q}$ יש בדיוק 2 דרכים להציגו:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_n}}, \quad x = a + \frac{1}{1} = a$$

היום נוכיח: $\{(a_0, a_1, \dots) : a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}, i \geq 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

היא חד-חד-חד.

משפט - ההצטקה $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\{ \{a_0, a_1, a_2, \dots\} \mid a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}, i \geq 1 \} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
המשפטים: $(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto [a_0; a_1, a_2, \dots]$ היא חזרה וחדה.

הוכחה: נניח ש- $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ אינו רציונלי, ושההצטקה חזרה (כל החסמים).

אם נחזור על הנימוקים שניתנו בהוכחת המשפט (*) נראה שהצטקה $x = [a_0; a_1, \dots]$ מקיים

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

ובמסגרת יש ל- x אינסוף קירובים שונים המקיימים

$$\frac{1}{q_n^2} > |x - \frac{p_n}{q_n}| > \frac{c}{q_n} \Rightarrow q_n < \frac{1}{c} < \infty \Rightarrow \text{סתיירה}$$

אם x רציונלי
 $x = \frac{p}{q}$ אז $\frac{p_n}{q_n} \neq x$

חזרה - נניח
 $(b_0, b_1, \dots) \neq (a_0, a_1, \dots)$
 $[b_0; b_1, \dots] \neq [a_0; a_1, \dots]$
נביט בהוכחה:

$$0 < \frac{1}{a_1+1} \leq \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} < \frac{1}{a_1} \leq 1$$

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \in (0, 1) \quad \text{כן}$$

אם $a_0 \neq b_0$ אז בהכרח $a_0 < b_0$
 $[a_0; a_1, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots} < a_0 + 1 \leq b_0 \leq b_0 + \frac{1}{b_1 + \dots}$

$$[a_0; a_1, \dots] \neq [b_0; b_1, \dots] \quad \text{כן}$$

נניח $a_0 = b_0$ אז את האלמנטים הראשונים בו הסגירות שוות

$$x \neq y, \quad x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots}}, \quad y = \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\dots}}$$

$$[a_0; a_1, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots a_1 + x}}, \quad [b_0; b_1, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots a_1 + y}}$$

$$z \mapsto a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots a_1 + z}}$$

הפונקציה הזו היא פונקציה של המילוי

ההוכחות של שוויון.

שימוש בנושאים ממשפטים להוכחת קיום מספר טרנסצנדנטי

נניח שיש מספר α אלגברי (כלומר לא טרנסצנדנטי) מדרגה d או 1 ש
 קן שעל $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{p}{q} \neq \alpha$ מתקיים $|\frac{p}{q} - \alpha| \geq \frac{c}{q^d}$

נבנה α באמצעות שברים ממשפטים, קן שיתקיים על α $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$ $(*)$
 נבנה את α ע"י הגדרת ה- a_n באינדוקציה

$a_0 = 0$. נניח שנבחרו $a_0, \dots, a_n$ ו- $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ מתקיים $(*)$

ע"י נבחר $a_{n+1} = q_n^{n-2}$, כי אז $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2} = \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$
 אז $(*)$ מתקיים עבור q וממשיכים.

נניח בשלילה ש- α אלגברי מדרגה d .
 ע"י עזיב $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ קן שעל $\frac{p}{q} \neq \alpha$ סכך $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^d}$

נשתמש ב- $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_n}{q_n} \neq \alpha$. $\frac{1}{q_n^2} \geq |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \geq \frac{c}{q_n^d}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{q_n^2} > \frac{c}{q_n^d}$
 $\downarrow$
 סתירה

סימון: עבור $x \in \mathbb{R}$, $\langle x \rangle = \min_{y \in \mathbb{Z}} |x - y| = \text{dist}(x, \mathbb{Z})$

משפט - המכנים q_n של הקרובים $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ מסתנים $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ מאוס"נים ע"י התכונה הבאה:

$$\langle q_n, \alpha \rangle = \min_{\substack{r \leq q_n \\ r \in \mathbb{Z}}} \langle r, \alpha \rangle$$

יתרה מכאן:

$\langle q_n, \alpha \rangle > 0$ - א - הסדרה $\langle q_n, \alpha \rangle$ יורדת

ב - עבור n , וכל $a, b \in \mathbb{Z}$, $1 \leq b \leq q_n$, $|b\alpha - a| \geq \langle q_n, \alpha \rangle$

המילים אחרות: מספרים של הסדרה $\alpha, \alpha+1, \dots, \alpha+N$ לכל N , עבורו $\langle \alpha \rangle < \min_{j=1, \dots, N-1} \langle \alpha+j \rangle$ חושמים את N .

הסדרה שמתקבלת היא בדיוק סדרת המכנים של שברונים המסומנים של α .

הוכחה: לכיו תחילה את ב'. נניח בשלילה שיש שלמים a, b המקיימים:
 $1 \leq b \leq q_n$, $|b\alpha - a| < \langle q_n, \alpha \rangle$. נרצה להגיד עתידה.

נבדיר מטעמים u, v ע"י: $\begin{bmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ו- $p_n u + p_{n+1} v = a$
 $q_n u + q_{n+1} v = b$

שנים ע"י u, v מתקבלים ע"י: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

(חישבו את הדטרמיננטה של המטריצה בהוכחה קודמת, היא שווה ± 1).

ממסמכת קראר נקבע ש- $\begin{bmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1} & -p_n \\ -q_n & p_n \end{pmatrix}$

זוהי מטריצה שלמה, ע"כ $u, v \in \mathbb{Z}$

המשך הוכחת המשפט:

נבדוק מקרים: א- $u=0$ ב- $v=0$ ג- $uv>0$ ד- $uv<0$

(שווי סימן) (שווי סימן)

א- אם $u=0$ אז $q_{n+1}v=b$ סתירה לכל $v \in \mathbb{Z}$, $1 \leq b < q_{n+1}$

ב- אם $v=0$ אז $p_n u = \alpha$, $q_n u = b$

$|b\alpha - \alpha| = |q_n u \alpha - p_n u| = |u| |q_n \alpha - p_n| \geq |q_n \alpha - p_n| \geq \langle q_n \alpha \rangle$ סתירה.

ג- אם u, v אינם שווים סימן: $q_n u + q_{n+1} v = b$ חילוקיים

אם u, v חילוקיים, $b \geq 1$, u, v חילוקיים. סתירה

אם u, v חילוקיים, $b > q_n v \geq q_{n+1} v$

ד- אם u, v אינם חילוקיים:

$|b\alpha - \alpha| = |(q_n u + q_{n+1} v)\alpha - (p_n u + p_{n+1} v)| =$

$= |u(q_n \alpha - p_n) + v(q_{n+1} \alpha - p_{n+1})| =$

$= |u(q_n \alpha - p_n)| + |v(q_{n+1} \alpha - p_{n+1})| \geq$

$\geq |u| |q_n \alpha - p_n| \geq |q_n \alpha - p_n| \geq \langle q_n \alpha \rangle$ סתירה.

→ מעבר הזהבט
בבדל ש- u, v
סימנים שונים, וגם
 $q_n \alpha - p_n$
ו- $q_{n+1} \alpha - p_{n+1}$
אין לאיזו שיוויון.

והוכחנו את ב'.

נוכיח את א' באינדוקציה על n . בהוכחה השתמשנו שבאינדוקציה הראשונה שאלו u, v חילוקיים. $1 - q_{n+2} < \alpha < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$

$\frac{p_n + j p_{n+1}}{q_n + j q_{n+1}} < \alpha$

מטעמי עולה $j-1$

ע"פ הנחת האינדוקציה $\langle q_{n+1} \alpha \rangle > \langle q_n \alpha \rangle$

$|q_n \alpha - p_n| > |q_{n+1} \alpha - p_{n+1}|$

הטעמי הפסד ביוזר חילוקיים

$(q_n + j q_{n+1}) \alpha - (p_n + j p_{n+1}) = \langle q_n \alpha \rangle - j \langle q_{n+1} \alpha \rangle$

נסתכל על

ע"כ אם $q_{n+2} = j$, $q_{n+2} < \alpha < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ כיסי טקן -1 $\langle q_{n+1} \alpha \rangle$