

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

1 ביוני 2017

משפט 0.1 במערכת $Py'' + Qy' + Ry = 0$, אם $\frac{R}{P}, \frac{Q}{P}$ אנליטיות ברדיוס ρ סביב x_0 אזי הפתרון y אנליטי סביב x_0 ברדיוס לפחות ρ .

תרגיל פותרים את

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

ראשית נדון בדריס ההתכנסות המובטח של y .

$$\frac{Q}{P} = -\frac{2x}{(1+x)(1-x)}$$
$$\frac{R}{P} = \frac{6}{(1-x)(1+x)}$$

שתי אלה מתכנסות ברדיוס $\rho = 1$ סביב 0, ולכן גם y כעת נפתור:

$$6y = 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^n$$
$$-2xy' = -2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot nx^{n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n$$
$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$
$$-x^2 y'' = -\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$$

לכן המשוואה שלנו היא למעשה

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^n = 0$$

נקבל

$$2a_2 + 6a_0 = 0$$

$$a_2 = -3a_0$$

$$6a_3 - 2a_1 + 6a_1 = 0$$

$$a_3 = -\frac{2a_1}{3}$$

כעת, לכל סדר אחר, נקבל

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (-n(n-1) - 2n + 6)a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{(n+3)(n-2)}{(n+1)(n+2)}a_n$$

נשים לב שכל המקדמים הזוגיים החל מהרביעי מתאפסים בהכרח, ולכן

$$y = 1 - 3x^2$$

פתרון פולינומיאלי. עבור הפתרון הלא פולינומי, נבדוק את הרדיוס של טור החזקות. נשתמש במבחן המנה (בלי הגבלת הכלליות נבחר $a_0 = 0$, כי זה לא ישנה את רדיוס ההתכנסות - זה רק מוסיף שני איברים פולינומיים). הפתרון הוא

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

ונחשב:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+3} x^{2n+3}}{a_{2n+1} x^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+4)(2n-1)}{(2n+2)(2n+3)} x^2$$

נרצה לקבל משהו שקטן מאחד, ולכן צריך $|x| < 1$.

1 מערכות של משוואות לינאריות

תרגיל ראינו נוסחת אבל למשוואות מסדר n ולמערכות מסדר n . נראה שהן זהות. עבור מערכת, בהנתן n פתרונות בלתי תלויים מגדירים $W = \det(x_1, \dots, x_n)$. עבור משוואה, מעבירים למערכת

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= y' \\ \frac{\partial y'}{\partial x} &= y'' \\ &\vdots \\ \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial x} &= -p_{n-1}y^{(n-1)} - \dots - p_0 y \end{aligned}$$

בהנתן n פתרונות בלתי תלויים, הגדרנו

$$W = \left(y_i^{(j)} \right)_{i,j}$$

אבל בניסוח כמערכת נקבל זהות של שתי ההגדרות. גם נוסחאות אבל מזדהות אם מציבים.