

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

18 במאי 2017

1 שיטות למציאת פתרונות פרטיים

1.1 וריאציית הפרמטרים

פותרים את

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

השלבים: פותרים את המערכת ההומוגנית, ומקבלים כי $y_h \in \text{span}\{u_1, u_2\}$. מנחשים פתרון מהצורה $y_p = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x)$. אחרי הרבה עבודה מקבלים

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

ומכלל קרמר:

$$c_1' = -\frac{u_2 g}{W}$$
$$c_2' = \frac{u_1 g}{W}$$

דוגמא נפתור את $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$. ניקח $u_1 = \cos x, u_2 = \sin x$. אזי $W = 1$, ואז

$$c_1' = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$c_1 = -\int \tan x = \ln |\cos x|$$

$$c_2' = \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$c_2 = \int 1 = x$$

בסך הכל נקבל

$$y_p = \cos x \cdot \ln |\cos x| + x \sin x$$

והפתרון הכללי הוא

$$y = y_h + y_p = A \cos x + B \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$$

כאשר A, B נקבעים לפי תנאי התחלה.

1.2 פונקציית גרין

פותרים כעת שוב את

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

למדנו שאם u_1, u_2 פתרונות הומוגניים של המערכת ובלתי תלויים, מגדירים

$$G(x, t) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{vmatrix}}{W(u_1, u_2, x)}$$

ומקבלים

$$y_p = \int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt$$

בכיתה ראינו שעבור $y'' + y = 0$ מתקיים $G(x, t) = g(x - t)$, וזה תמיד המצב עבור מקדמים קבועים (p, q) . במקרה זה $g(x - t) = \sin(x - t)$.

דוגמה נגדיר

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{o/w} \end{cases}$$

נשים לב כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1$$

וזאת לכל n . נפתור עבור $x > 1$ את המשוואה, עם תנאי ההתחלה $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

$$\begin{aligned} y_p^n(x) &= \int_0^x \sin(x-t) f_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n \sin(x-t) dt = n \cos(x-t) \Big|_0^{\frac{1}{n}} = \\ &= n \left(\cos\left(x - \frac{1}{n}\right) - \cos x \right) = \frac{\cos(x) - \cos\left(x - \frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

נקיח גבול כאשר $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\cos(x) - \cos\left(x - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \sin x = g(x)$$

קיבלנו שוב את פונקציית גרין!

דוגמא נפתור את המשוואה:

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1+x^2)^2 e^x$$

עם תנאי התחלה בנקודה 1. נתונים הפתרונות ההומוגניים $u_1(x) = x$, $u_2(x) = x^2 - 1$. נפתור באופן כללי על ידי פונקציית גרין.

$$G(x, t) = \frac{\begin{vmatrix} t & t^2 - 1 \\ x & x^2 - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix}} = \frac{t(x^2 - 1) - x(t^2 - 1)}{2t^2 - t^2 + 1} = \frac{t(x^2 - 1) - x(t^2 - 1)}{t^2 + 1}$$

ואז

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_1^x G(x, t) f(t) dt = \int_1^x \frac{t(x^2 - 1) - x(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \frac{(1+t^2)^2 e^t}{(1+t^2)} dt = \\ &= (x^2 - 1) \int_1^x e^t t dt - x \int_1^x e^t (t^2 - 1) dt = [integration by parts] \dots \end{aligned}$$

2 איך פותרים משוואה מסדר 2 שאינה לינארית?

עד עכשיו פתרנו רק משוואות לינאריות.

חימום עבור המקרה $y'' = f(x, y')$ נציב $v = y'$, ונקבל $v' = f(x, v)$ - משוואה מסדר ראשון!

דוגמא $y'' = x^2 y'^2$ נציב $v = y'$, ונקבל $v' = x^2 v^2$ ומכאן

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v^2} &= x^2 dx \\ -\frac{1}{v} &= \frac{x^3}{3} + c \\ y' &= -\frac{1}{\frac{x^3}{3} + c} \end{aligned}$$

וזה יפתר על ידי אינטגרציה.

אוטונומי המקרה הזה הוא $y'' = f(y, y')$ כמו קודם, נציב $v = y'$. נקבל

$$v' = f(y, v)$$

נעבור להסכלות על דברים כפונקציות במשתנה y (הגיוני, כי הכל תלוי רק בערך y).

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy} v$$

דוגמא נפתור את

$$yy'' + y'^2 = 0$$
$$y'' = -\frac{y'^2}{y}$$

נציב $v = y'$ ונקבל

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v^2}{y}$$
$$v(y) \frac{dv}{dy} = -\frac{v(y)^2}{y}$$
$$\frac{dv}{dy} = -\frac{v(y)}{y}$$
$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{y} dy$$
$$\ln|v| = -\ln|y| + c$$
$$v = \frac{A}{y}$$

כעת, נקבל

$$y' = \frac{A}{y}$$

וזו עוד משוואה מסדר ראשון שעלינו לפתור.

$$\frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2$$

רמאות נשים לב:

$$yy'' + y'^2 = (yy')' = 0$$
$$yy' = C$$

וזה הדבר השני שפתרנו!