

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

4 במאי 2017

1 משוואות מסדר גבוה

תזכורת נתונה משוואה מסדר n :

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

ראינו גם ניסוח שקול כמערכת מסדר n של משוואות מסדר ראשון:

$$y' = z_1$$

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = z_3$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = z_{n-1}' = f(x, y, z_1, \dots, z_{n-2})$$

ראינו כי עבור תנאי ההתחלה:

$$y(x_0) = y_0$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

יש קיום ויחידות באותם תנאים שיש בסדר ראשון - זאת אומרת אם f ליפשיץ במשתנים $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.

דוגמא לחימום: נפתור את:

$$y'' + e^{x^3} y' + \frac{\sin(x^3)}{e^{4x}} y = 0$$

$$y(4) = 0$$

$$y'(4) = 0$$

פתרון נשים לב שיש פתרון מהצורה $y \equiv 0$. זהו הפתרון היחיד, כי f , בהצגה $y'' = f(x, y, y')$, היא ליפשיץ במשתנים y, y' .

1.1 משוואות לינאריות (הומוגניות) מסדר שני

מתבוננים במשוואה

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

משפט 1.1 קבוצת כל הפתרונות למשוואה זו היא מרחב ווקטורי ממימד 2. בהינתן שני פתרונות y_1, y_2 של המשוואה, נגדיר

$$W(x; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

ואז מתקיים

$$W(x; y_1, y_2) = W(x_0; y_1, y_2) e^{-\int_{x_0}^x p(s) ds}$$

לכן W מתאפס בנקודה אחת אם ורק אם הוא מתאפס בכל תחום ההגדרה של p, y_1, y_2 .
אם הפתרונות תלויים לינארית, אזי $W \equiv 0$.

עבור משוואה לינארית מסדר n כללי,

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x) y^{(i)} = 0$$

כאשר $y_1, \dots, y_n$ פתרונות, מגדירים

$$W = \begin{vmatrix} (y_j^{(i)})_{i,j} \end{vmatrix}$$

בתרגיל הבית נוכיח את הנוסחה שלעיל עבור n כללי.

דוגמה נתונות $u_1 = x^2, u_2 = x^3$. נחשב את הוורונסקיאן:

$$W(x; u_1, u_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4$$

נקבל שהוא מתאפס לפעמים. זו לא סתירה - פשוט נובע כי u_1, u_2 לא יכולים להיות שני פתרונות של משוואה לינארית מסדר שני בתחום הכולל את 0.

הוורונסקיאן הוא כלי (עבור משוואות דיפרנציאליות בלבד) לבדוק האם n פתרונות נתונים פורשים את מרחב הפתרונות.

"עכשיו נעשה דוגמה, שהיא חביבה עליי" - המתרגל

1.1.1 משוואת לז'נדר

מסדר n :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

בתחום $x \in [-1, 1]$

פולקלור נרצה להעריך את

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

אם f חלקה, מספיק להעריך על האפסים של פולינומי לז'נדר (פתרונות פולינומיאליים למשוואת לז'נדר). פולינום מסדר n נותן קירוב מסדר n .

בחזרה למשוואה - נעבוד עם סדר ראשון:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

נחפש פתרון שהוא מונום x^k : על ידי הצבה נקבל משוואה על k , ונוכל לפתור אותה ולקבל $k=1$, כלומר $y=x$ פולינום. נרצה למצוא פתרון נוסף (קיים, כי מימד מרחב הפתרונות הוא 2). נחפש $y_2(x) = y_1(x)v(x)$. על ידי הצבות וייסורים מקבלים

$$v'(x) = \frac{1}{y_1^2} \exp \left(- \int^x p(s) ds \right)$$

במקרה הפרטי שלנו, $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$, כי הצורה הקנונית היא $y'' + py' + qy = 0$. אם כן:

$$\int \frac{-2x}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \ln(1-x^2)$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{1}{x^2} e^{-\ln(1-x^2)} = \frac{1}{x^2(1-x^2)} \\ v(x) &= \int^x \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt = \int^x \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} dt = \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

בסך הכל

$$y_2(x) = -1 + \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

זה נקרא פולינום לז'נדר מהסוג השני מסדר ראשון. נשים לב שהפתרון $y_2(x)$ מוגדר בקטע $(-1, 1)$, בעוד $y_1(x)$ מוגדר בכל $[-1, 1]$. לכן בנקודות הקצה המקדמים הלא רציפים לא דווקא משנים. זה נובע מהתכנסות ואי התכנסות של אינטגרל של טור חזקות בקצוות - עוד בהמשך. כעת, נתונה משוואה מסדר שני

$$y'' + py' + qy = 0$$

ונתון פתרון $y_1(x)$ נראה שאפשר להשתמש בנוסחת אבל כדי למצוא פתרון y_2 שאינו תלוי לינארית באותו y_1 . אם $W(x_0) \neq 0$ אזי לכל x בתחום $W(x) \neq 0$. עבור y_2 כלשהו מתקיים

$$W(x; y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

אבל, מנוסחת אבל, מתקיים גם

$$W(x; y_1, y_2) = W(x_0) e^{-\int^x p(s) ds}$$

לכן באופן כללי,

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = W(x_0) e^{-\int^x p(s) ds}$$

הפונקציה $e^{-\int^x p(s) ds}$ היא ידועה. אפשר לבחור את $W(x_0)$ על ידי שנבחר שני זוגות של תנאי התחלה עבורם $W(x_0) \neq 0$. בדוגמה של לז'נדר ראשון, $y_1 = x$, נשים לב כי $p = -\frac{2x}{1-x^2}$.

$$y_1(0) = 0$$

$$y_1'(0) = 1$$

נבחר לכן

$$y_2(0) = 1$$

$$y_2'(0) = 0$$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ וכן}$$

$$e^{-\int^x p(s) ds} = \frac{1}{1-x^2}$$

כמו שחישבנו קודם. קיבלנו

$$xy_2' - y_2 = \frac{1}{1-x^2}$$

זו משוואה לינארית לא הומוגנית מסדר ראשון עבור y_2 . פותרים עם גורם אינטגרציה.