

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

27 באפריל 2017

1 שיטות גרפיות

דוגמא $y' = \sin y$. משוואה זו היא אוטונומית - כלומר לא תלויה במשתנה t במפורש. היא ניתנת להפרדה ומקבלים

$$t = \ln \left| \frac{\csc(y_0) + \cot(y_0)}{\csc(y) + \cot(y)} \right|$$

1.1 ישר הפאזה

נזכר בתרגיל שעשינו בעבר - אם $y(t)$ פתרון, אזי לכל t_0 גם $y(t - t_0)$ פתרון. לכן מספיק לנו לדעת את הקשר בין y' לבין y , ולכן מציירים את הקשר הזה כגרף - ישר הפאזה. נניח שנתון תנאי התחלה $y(t_0) = 5$ (בדוגמא הקודמת עם $\sin$). לפי ישר הפאזה, בנקודה הזו אנחנו נלך שמאלה. לא נוכל לעבור את הנקודה $y = \pi$, כי משמאלה הולכים ימינה. אם תנאי ההתחלה שלנו היה $y(t_0) = \pi$, לעומת זאת, נפתור לרגע כמו שצריך - אנחנו יודעים שיש פתרון סטציונרי $y = \pi$, וממשפט הקיום והיחידות של פיקרד ידוע שזה היחיד שעובר בנקודה $y = \pi$ (כי המשוואה אוטונומית). לכן, כל הנקודות בהן $\dot{y} = \sin y$ מתאפס הן נקודות שבת - קרי, קיים פתרון סטציונרי קבוע עליהן. זה נותן לנו לחשוב על משוואה דיפרנציאלית רגילה כמערכת שממפה ערכי y לערכי y עתידיים.

ננסה להבין את ההבדל בין נקודות שבת יציבות ולא יציבות. נחשוב על קערה, ונניח בה כדור. אם נניח אותו בסביבת התחתית של הקערה, הוא יישאר שם - כלומר תחתית הקערה היא נקודת שבת יציבה. אם נהפוך את הקערה ונניח את הכדור בראשה, זו תהיה נקודת שבת - אבל אם נזיז אותו במעט הוא יברח מהסביבה הזו. לכן זו נקודת שבת לא יציבה. במשוואה המקורית שלנו, $y = \pi$ יציבה - בסביבתה נעים בחזרה אליה. לעומת זאת, $y = 0$ לא יציבה - תנועה קטנה תעיף אותנו לכיוון הנקודות $\pm\pi$. נעבור להתבונן במשוואה פרמטרית:

$$y'(x) = r \ln y + y - 1$$

כאשר $r \in \mathbb{R}$ פרמטר. כחימום נתבונן במקרה $r = 1$ - הכל מוגדר רק עבור $y > 0$. נקודת השבת היא $y = 1$, והיא לא יציבה.

נזכר כי יציבות הנקודה $y^* = 1$ נקבעת לפי

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y^*} = \frac{r}{y} + 1$$

אם $r < -1$ זה גודל שלילי, ואז y^* יציבה. אם $r > -1$, זה גודל חיובי, ולכן y^* לא יציבה. עבור $r = -2$, למשל, נקבל נקודה יציבה עבור $y^* = 1$, ונקודה לא יציבה שתלויה בנקודה r שנסמנה $y^*(r)$. עבור $r = -1$ הנקודות הללו מתאחדות למעשה - לנקודה אחת יציבה למחצה $y^* = 1$. זה נקרא נקודת הסתעפות - וספציפית סוג ההסתעפות Trans-critical bifurcation. מציירים את דיאגרמת ההסתעפויות, שבה מתארים את y כפונקציה של r , ומציירים בה את התקדמות נקודות השבת. נראה בה, למשל, שנקודת השבת $y^* = 1$ יציבה עד $r = -1$, ושם היא נהיית לא יציבה, וכך היא ממשיכה. זאת למרות שהמערכת "נראית" רציפה בפרמטר r .

בשיעור ראינו סוג אחר של הסתעפות - saddle node bifurcation.

דוגמא לכל $r \in \mathbb{R}$ נתונה המשוואה

$$y'(x) = r - y - e^{-y}$$

כאשר r מאוד גדול, נוכל לצייר את $r - y$ ואת e^{-y} . נקבל שתי נקודות חיתוך, שהן נקודות שבת שנסמנן y^*, y^{**} . לפי הציור הזה נוכל גם לדעת את ערך y' , כלומר יציבות - נקבל כי y^* לא יציבה, y^{**} כן (y^* היא השמאלית מבין השתיים). לעומת זאת, עבור r קטן מאוד, $r - y$ תעבור לחלוטין מתחת לגורם השני - ולכן אין נקודות שבת. מכאן, ההסתעפות היא כאשר $r - y$ משיקה לגורם השני. תרגיל (שאפשר לעשות גם בתיכון) הוא למצוא את r שמקיים את זה. דיאגרמת הביפורקציה תראה נקודה לא יציבה ונקודה יציבה, שמתקרבות עד שהן נפגשות, ואז נעלמות - וזה בדיוק saddle node bifurcation.

ביפורקציות כאלה הן אוניברסליות, במובן שקרוב לנקודת ההסתעפות יש שינוי משתנים שמעביר את המשוואה לצורה $y' = r - y^2$.