

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

21 באפריל 2017

1 רגע של דיוק

נתונה משוואה

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

היא נקראת מדויקת אם

$$M_y = N_x$$

לפעמים יש גורם אינטגרציה $\mu(x, y)$, כלומר אם נכפול בו נקבל משוואה מדויקת. למדנו למצוא פתרון למשוואה מדויקת מהצורה

$$F(x, y) = c$$

עבור $c \in \mathbb{R}$. במצב זה F אינה פתרון - היא פונקציה של שני משתנים. פתרון הוא קשר בין x, y , כלומר המשוואה

$$F(x, y) = c$$

היא פתרון.

2 קיום ויחידות

משפט 2.1 (משפט פיקארד לקיום ויחידות) נתבונן במשוואה

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

במלבן

$$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

כאשר $a, b > 0$. נניח כי f ליפשיץ על המלבן. אזי יש קיום ויחידות לוקאלית של הפתרון.
נסמן

$$M = \max_{(x,y) \in R} |f(x,y)|$$

ואז נגדיר

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

ונקבל קיום ויחידות של הפתרון בקטע $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

הערה 2.2 המשפט אינו אם ורק אם (תנאי מספיק, לא הכרחי).

2.1 קיום ויחידות בקטע

1. קיום - יש $y(x)$ כך שלכל $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ מתקיים $y'(x) = f(x, y)$.

2. יחידות - אם יש עוד פתרון z , אזי לכל x בקטע מתקיים $y(x) = z(x)$.

דוגמא

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^2 + e^{-y^2} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

נרצה להראות שי פתרון יחיד עבור $|y| \leq 1, x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

פתרון נסמן $f(x, y) = x^2 + e^{-y^2}$, וזו פונקציה ליפשיץ - גזירה ברציפות, ובפרט ליפשיץ.
כעת בחר

$$\begin{aligned} R &= \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times [-1, 1] \\ M &= \max_R |x^2 + e^{-y^2}| = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

לכן

$$\alpha = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{5} \right\} = \frac{1}{2}$$

לפי פיקארד יש קיום ויחידות.

2.2 איטרציות פיקארד

חוץ מכלים אנליטיים, זוהי שיטה נומרית שפותרת כל משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון. נתון

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

אז איטרציות פיקרד הן:

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n) dt$$

הוכחנו בשיעור שאלה מתכנסות לפתרון המשוואה אם מתקיימים תנאי משפט פיקארד.

דוגמא נפתור את

$$\begin{aligned}y' &= y \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

על ידי איטרציות פיקרד:

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x 1 + t dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

וכן הלאה. נוכיח באינדוקציה כי

$$y_n = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!}$$

(איטרציות פיקארד לא תמיד מתכנסות לטור טיילור!) נניח עבור n , ונראה את הצעד:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= 1 + \int_0^x \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!} dt = \\ &= 1 + \sum_{j=0}^n \frac{x^{j+1}}{(j+1)j!} = \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{x^j}{j!}\end{aligned}$$

3 אי שוויונות דיפרנציאליים, רציות בתנאי התחלה או במשוואה

אי שוויונות דיפרנציאליים הם מהצורה

$$y' \leq f(x, y)$$

רציפות הכוונה שאם

$$y' = f(x, y)$$

$$z' = g(x, y)$$

וכן

$$|f(x, y) - g(x, y)| < \varepsilon$$

מה ניתן לומר על $|y(x) - z(x)|$?

משפט 3.1 תהי $w \in C^1(\mathbb{R}^2)$. נניח כי

$$\dot{u} = w(t, u)$$

על $[a, b]$, בעוד

$$\dot{v} \leq w(t, v)$$

על $[a, b]$. נניח גם כי

$$v(a) \leq u(a)$$

אזי לכל $t \in [a, b]$, מתקיים

$$v(t) \leq u(t)$$

הוכחה: נגדיר u_n המקיימות

$$\dot{u}_n = w(t, u_n) + \frac{1}{n}$$

וכן $u_n(a) = u(a)$ לכל $a \in \mathbb{N}$. ממשפט על רציפות במשוואה $y' = f(x, y)$ נובע שאם נסמן

$$w_n(t, y) = w(t, y) + \frac{1}{n}$$

אזי

$$|w - w_n| \leq \frac{1}{n}$$

בכל מקום, ומקבלים $u_n \rightarrow u$. בפרט, החל מאיזהו N גדול מספיק, u_n מוגדר בכל $[a, b]$. נניח בשלילה שיש $t_1 \in [a, b]$ עם $u(t_1) < v(t_1)$. כיוון שמתקיים $u_n \rightarrow u$ במידה שווה, נבחר n גדול מספיק עבורו

$$u_n(t_1) < v(t_1)$$

לכן, יש $a \leq t_2 < t_1$ כך שבקטע $[t_1, t_2]$ מתקיים $u_n(t) < v(t)$ אבל $u_n(t_2) = v(t_2)$.
נובע כי

$$\begin{aligned} w(t, v(t_2)) &\geq \dot{v}(t_2) \geq \dot{u}_n(t_2) = w(t_2, u_n(t_2)) + \frac{1}{n} = \\ &= w(t_2, v(t_2)) + \frac{1}{n} > w(t_2, v(t_2)) \end{aligned}$$

■

בסתירה.