

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

29 ביוני 2017

1 תורת פלוקה

יש לנו מערכת לינארית

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

כאשר $A(t)$ מחזורית עם זמן מחזור $T > 0$. ראינו שלכל פתרון יסודי $X(t)$ (מטריצה שעמודותיה פתרונות בלתי תלויים) קיימת מטריצה B עם

$$X(t+T) = X(t)B$$

הערה 1.1 אמנם לכל X יש B , אבל אם $X, \tilde{X}$ שתי מטריצות יסודיות, נקבל $B, \tilde{B}$ מתאימות שדומות אחת לשנייה.

ראינו שאם $\rho \in \mathbb{R}^+$ ערך עצמי של B אז קיים פתרון

$$x(t) = e^{\mu t} p(t)$$

באשר $\rho = e^{\mu T}$ וכן $p(t)$ מחזורית. אם $\rho < 0$ אזי נוכל לכתוב

$$x(t) = e^{\frac{i\pi t}{T}} e^{\mu t} p(t)$$

נדון כעת במקרה הכללי $\rho \in \mathbb{C}$. נכתוב $\rho = \alpha + i\beta = e^{\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}}$. נתונים ולכן נוכל למצוא את $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$. הוכחנו בשיעור שיש

$$x(t) = \rho p(t)$$

$$x(t) = e^{i\tilde{\beta}t} e^{\tilde{\alpha}t} p(t)$$

טענה 1.2 B ממשיית (נוכיח תיכף).

הוכחה: נניח שתנאי ההתחלה ממשי. ידוע לנו כי $X(0) \in M_n(\mathbb{R})$, ואז

$$X(T) = X(0)B$$

$$B = X^{-1}(0)X(T)$$

■

המערכת ממשיית, ולכן זו ממשיית - הפתרון הוא ממשי.

מכאן נקבל שגם $\bar{\rho}$ ערך עצמי, ואז

$$\bar{\rho} = e^{\tilde{\alpha} - i\tilde{\beta}}$$

מקבלים שני פתרונות -

$$x_1 = \cos(\tilde{\beta}t) e^{\tilde{\alpha}t} p(t)$$

$$x_2 = \sin(\tilde{\beta}t) e^{\tilde{\alpha}t} p(t)$$

דוגמא הוכיחו שלמשוואה

$$u'' - 2\sin^2 t u' + \sin(2t) u = 0$$

אין קבוצה יסודית של פתרונות מחזוריים.

פתרון נכתוב במערכת:

$$x' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(2t) & 2\sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = Ax$$

המערכת מחזורית עם מחזור $T = \pi$. יש פתרון מחזורי אם קיים ערך עצמי $1, -1$, פעמיים עבור B של קודם. הוכחנו בכיתה:

$$\det B = e^{\int_0^T \text{Tr}(A)} = e^{\int_0^T 2\sin^2 t dt} > 1$$

שכן $2\sin^2 t > 0$. לכן נקבל כי מכפלת הערכים העצמיים היא גדולה מאשר 1 - ולכן לא ייתכן ששניהם מתוך $\{1, -1\}$.

דוגמא נתבונן במערכת

$$x_1' = \left(1 + \frac{\cos t}{2 + \sin t}\right) x_1$$

$$x_2' = x_1 - x_2$$

נפתור את המערכת. המשוואה הראשונה ניתן להפרדה, ונקבל

$$x_1(t) = A(\sin t + 2)e^t$$

לכל $A \in \mathbb{R}$ קבוע. מהצבת x_1 נקבל משוואה לינארית עבור x_2 , שהפתרון שלה

$$x_2 = 2A + ce^{-t} + \frac{A}{2}(\sin t - \cos t)$$

נחשב את B למטריצה יסודית כלשהי. המערכת היא

$$x' = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\cos t}{2 + \sin t} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

נחפש את $X(T) = X(2\pi)$ עבור $X(0) = I_2$. מהצבת תנאי ההתחלה הללו נקבל שני פתרונות:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sin t + 2)e^t \\ 1 - \frac{5}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}(\sin t - \cos t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

נציב ונקבל

$$X(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ \frac{5}{4}(1 - e^{-2\pi}) & e^{-2\pi} \end{pmatrix} = X(0)B = B$$

נוודא את הנוסחה לדטרמיננטה:

$$\det(B) = 1$$

וכן

$$\int_0^{2\pi} \text{Tr} A(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2 + \sin t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{u} du = \ln(2 + \sin t) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

ואכן

$$\det B = e^{\int_0^{2\pi} \text{Tr}(A)} = 1$$