

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

22 ביוני 2017

1 התמרת לפלאס

טענה 1.1

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-cs}F(s)) = u_c(t)f(t-c)$$

כאשר

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_c(t)f(t-c)) &= \int_0^\infty u_c(t)f(t-c)e^{-st}dt = \int_c^\infty f(t-c)e^{-st}dt = \\ &= \int_0^\infty f(z)e^{-sz-sc}dz = e^{-sc} \int_0^\infty f(z)e^{-sz}dz = e^{-sc}F(s) \end{aligned}$$

■

דוגמה נפתור משוואה עם טרנספורם לפלאס. נגדיר

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \pi < t \end{cases} = 1 - u_\pi(t)$$

נפתור את המשוואה

$$\begin{aligned} y'' + y' + \frac{5}{4}y &= g(t) = 1 - u_\pi(t) \\ y'(0) &= 0, y(0) = 0 \end{aligned}$$

נתמיר:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) + \frac{5}{4}Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(s^2 + s + \frac{5}{4})}$$

נכתוב כעת

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + \frac{5}{4})}$$

נניח שהצלחנו להתמיר אותה אחורה, נסמן $\mathcal{L}^{-1}(H(s)) = h(t)$ אזי

$$Y(s) = H(s) - e^{-\pi s}H(s)$$

$$y(t) = h(t) - u_\pi(t)h(t - \pi)$$

נותר להתמיר לאחור את H . נפרק לשברים חלקיים ונקבל

$$H(s) = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + \frac{5}{4}} \right)$$

כעת יש לנו שתי אפשרויות. ראשית, נוכל לזכור כי

$$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} = e^{-\alpha t} \mathcal{L}(\cos(\beta t))$$

$$\frac{1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} = e^{-\alpha t} \mathcal{L}(\sin(\beta t))$$

אם כן, נוכל לכתוב

$$\frac{s+1}{s^2 + s + \frac{5}{4}} = \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + 1}$$

ואז

$$\mathcal{L}^{-1}(H(s)) = \frac{4}{5} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos t + \frac{1}{2} \sin t \right) \right)$$

דרך נוספת היא לחשב את השורשים של הפולינום הריבועי, ולהמשיך ולפרק לשברים חלקיים.

1.1 קונבולוציה

ההגדרה היא

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

התכונות של זה דומות לשל כפל, למעט:

$$f * 1 \neq f$$

כמעט אף פעם. למשל

$$(\cos * 1)(t) = \int_0^t \cos(t - \tau) d\tau = -\sin(t - \tau) \Big|_0^t = \sin t$$

תזכורת

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f * g) &= \mathcal{L}(f) \mathcal{L}(g) \\ \mathcal{L}^{-1}(FG) &= \mathcal{L}^{-1}(F) * \mathcal{L}^{-1}(G)\end{aligned}$$

דוגמא נפתור משוואה אינטגרלית:

$$y(t) + \int_0^1 (t - \tau) y(\tau) d\tau = \sin(2t)$$

נשים לב שיש פה קונבולוציה:

$$y + t * y = \sin(2t)$$

נפעיל טרנספורם:

$$\begin{aligned}Y + \mathcal{L}(t) Y &= \mathcal{L}(\sin(2t)) \\ Y + \frac{Y}{s^2} &= \frac{2}{s^2 + 4} \\ Y &= \frac{2s^2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}\end{aligned}$$

מכאן אפשר לעבוד ולעשות טרנספורם הפוך:

$$\begin{aligned}Y &= \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1}{3(s^2 + 1)} - \frac{1}{3(s^2 + 4)} \\ y &= \frac{5}{3} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(t)\end{aligned}$$