

משוואות דיפרציאליות רגילות 1

© ארזים

15 ביוני 2017

1 אקספוננט המטריצה

נחשב את e^{At} עם

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

אפשר לחשב לפי טור חזקות אבל זה לא מעניין. במקום זה נפתור את המשוואה

$$X' = AX$$

$$X(0) = \text{Id}$$

הערכים העצמיים הם $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$, עם ווקטורים עצמיים

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

אז יש פתרון לשמוואה מטריצינית עם תנאי התחלה כלשהו שנראה כמו

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{pmatrix}$$

נחשב את $\tilde{X}^{-1}(0)$ - קיימת כי הווקטורים ξ_1, ξ_2, ξ_3 בלתי תלויים - שכן יש לנו את הטענה הבאה.

1.1 טענה

$$e^{At} = \tilde{X}(t) \tilde{X}^{-1}(0)$$

הגדרה 1.2 מקיים את המדר כי $\tilde{X}^{-1}(0)$ קבועה. כמו כן,

$$\tilde{X}(0) \tilde{X}^{-1}(0) = \text{Id}$$

ומכאן אלה חישובים.

תכונה הראינו שמתקיים $e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$ לכל $t, s \in \mathbb{R}$. כעת נראה שלכל A, B מסדר n שמתחלפות, כלומר $AB = BA$, מתקיים

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$$

הוכחה: נראה שהמערכת

$$\begin{aligned} X' &= (A + B)X \\ X(0) &= \text{Id} \end{aligned}$$

נפתרת על ידי $e^{(A+B)t}$ כאשר $AB = BA$. נשים לב שבאינדוקציה;

$$A^k B = A^{k-1} B A = \dots = A B A^{k-1} = B A^k$$

כעת,

$$B e^{At} = B \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n B}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) B = e^{At} B$$

נגזור את $(e^{At}e^{Bt})$:

$$(e^{At}e^{Bt})' = A e^{At}e^{Bt} + e^{At}B e^{Bt} = A e^{At}e^{Bt} + B e^{At}e^{Bt} = (A + B) e^{At}e^{Bt}$$

לבסוף

$$e^{A \cdot 0} e^{B \cdot 0} = \text{Id} \cdot \text{Id} = \text{Id}$$

ולכן זהו אכן פתרון, ומיחידות

$$e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$$

■

2 עקרון דוהמל למשוואות לא לינאריות

נניח כי

$$\begin{aligned} u_t &= Lu + g(u) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

כאשר $L(t)$ מטריצה, u, u_0 , ווקטורים. נניח פתרון

$$S_t = LS(t, t_0)$$

שמקיים

$$S(t, t_0) = \text{Id}$$

2.1 טענה

$$u(t) = S(t, 0)u_0 + \int_0^t S(t, \tau)g(u(\tau))d\tau$$

הוכחה:

$$u_t = S_t u_0 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} S(t, \tau)g(u(\tau))d\tau + S(t, t)g(u(t))$$

כעת, $S_t = LS$ ולכן

$$\begin{aligned} u_t &= LSu_0 + \int_0^t LS(t, \tau)g(u(\tau))d\tau = \\ &= L\left(Su_0 + \int_0^t S(t, \tau)g(u(\tau))d\tau\right) = Lu \end{aligned}$$

■

2.1 למה זה טוב?

נניח $|g| < A$ לכל $t \in \mathbb{R}$ (לשם פשטות נצטמצם למקרה הסקלרי). אם כן, מצלינאריות (גם במקרה הווקטורי), לכל v (גם ווקטור) מתקיים

$$|S(t, t_0)v| \leq |v|Ke^{\alpha(t-t_0)}$$

אם $L(t)$ חסומה אקספוננציאלית בכל קואורדינטה. עכשיו,

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |Su| + \left| \int_0^t S(t, \tau) g(u(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq Ke^{\alpha t} |u_0| + \int_0^1 |S(t, \tau) g(u(\tau))| dt \leq \\ &\leq Ke^{\alpha t} |u_0| + \int_0^t Ke^{\alpha(t-\tau)} A d\tau \leq \\ &\leq Ke^{\alpha t} |u_0| + \frac{AK(e^{\alpha t} - 1)}{\alpha} \leq \tilde{K}e^{\tilde{\alpha}t} \end{aligned}$$

3 התמרת לפלאס

טענה 3.1 נוכיח

$$\mathcal{L}(t^k) = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

הוכחה: ראינו שמתקיים

$$\mathcal{L}(t^k f(t)) = (-1)^k F^{(k)}(s)$$

נבחר $f(t) = 1$ ואז

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s} \\ F^{(k)}(s) &= (-1)^k \frac{k!}{s^{k+1}} \end{aligned}$$

■

ולכן סיימנו.

טענה 3.2 הטרנספורם עובר time scaling:

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

הוכחה:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-us} f(u) du = \frac{1}{a} F(u) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

■