

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

19 באפריל 2017

1 דוגמאות ליחידות/חוסר יחיסות הפתרון

דוגמה נתבונן במערכת

$$\begin{aligned}y' &= y^{\frac{1}{3}} \\ y(1) &= 3\end{aligned}$$

$f(x, y) = y^{\frac{1}{3}}$ במצב זה. פונקציה זו רציפה לכל x, y , והנגזרת שלה לפי y רציפה עבור $y \neq 0$. לכן, על פי משפט קיום ויחידות, קיים פתרון יחיד בסביבה של $(1, 3)$. נפתור: $y = 0$ פתרון, אבל לא מקיים תנאי התחלה. לכן נוכל לחלק:

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} = 1$$

ניקח אינטגרל dx :

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = x + c$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}3^{\frac{2}{3}} &= 1 + c \\ c &= \frac{3}{2}3^{\frac{2}{3}} - 1\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}y^{\frac{2}{3}} &= x + \frac{3}{2}3^{\frac{2}{3}} - 1 \\ y &= \pm \left(x + \frac{3}{2}3^{\frac{2}{3}} - 1 \right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

הפתרון עם מינוס הוא שלילי, ולא מקיים את תנאי ההתחלה. לכן הפתרון הוא

$$y = \left(x + \frac{3}{2} 3^{\frac{2}{3}} - 1 \right)^{\frac{3}{2}}$$

פתרון זה מוגדר עבור $x > 1 - \frac{3}{2} 3^{\frac{2}{3}}$. בהמשך נתייחס למה שקורה בצד השני של הנקודה הזו.

דוגמה נשנה את תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} y' &= y^{\frac{1}{3}} \\ y(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

כעת, לא נוכל להפעיל את משפט הקיום והיחידות, כי $f_y(x, y)$ לא חסומה באף סביבה של (x_0, y_0) . עם זאת, הפונקציה f רציפה וחסומה, ולכן נוכל להפעיל את משפט פיאנו ולקבל שקיים פתרון, לאו דווקא יחיד. כעת, $y = 0$ כן פתרון. כמו כן, אם נציב את תנאי ההתחלה בפתרון שמצאנו קודם:

$$c = -x_0$$

ואז

$$y = \pm \left(\frac{2}{3} (x - x_0) \right)^{\frac{3}{2}}$$

ושני אלה טובים עבור $x > x_0$. לכן יש 3 פתרונות שעוברים בנקודה $(x_0, 0)$. נשים לב שנוכל להגדיר את y להיות 0 לפני x_0 ולקבל פתרון C^1 . כמו כן, היינו יכולים להחליט כי y היא 0 עד a כלשהו שגדול יותר מאשר x_0 , ואחריו מתחיל להיות הפתרון שלעיל. כלומר, יש אינסוף פתרונות, מהצורה

$$y(x; a) = \begin{cases} \pm \left(\frac{2}{3} (x - a) \right)^{\frac{3}{2}} & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases}$$

כאשר $a > x_0$. בדוגמה הראשונה היינו יכולים להרחיב בצורה יחידה:

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3} \left(x + \frac{3}{2} 3^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \right)^{\frac{3}{2}} & x > 1 - \frac{3}{2} 3^{\frac{2}{3}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2 קיום ואי קיום גלובלי

אנו מתבוננים במערכת

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

האם קיים פתרון גלובלי, כלומר לכל $-\infty < x < \infty$? אם לא, מה התחום המקסימלי עבורו קיים פתרון? כיצד פתרון זה יכול להישר?

משפט 2.1 אל לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ הפונקציה $f(x, y)$ מוגדרת, גזירה ברציפות וחסומה, אזי לבעית תנאי ההתחלה קיים פתרון גלובלי.

הוכחה: ממשפט הקיום והיחידות הראשון (במלבן) נובע שאם f גזירה ברציפות במלבן $(x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$, אזי קיים פתרון יחיד בקטע $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, כאשר $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, כאשר M הוא החסם של f . מתנאי המשפט נובע שניתן לחקת את a, b גדולים כרצוננו. על כן, המשפט הלוקאלי נכון עם α גדול כרצוננו. לכן קיים פתרון גלובלי, ופתרון זה חייב להיות יחיד. נשים לב שהשתמשנו בכך שאותה f חסומה גלובלית, אבל לא דרשנו כי f_y חסומה גלובלית. ■

דוגמא

$$y' = \sin(y^2)$$

אזי $f = \sin(y^2)$, $f_y = 2y \cos(y^2)$. יש קיום גלובלי לפי המשפט למרות שהנגזרת f_y לא חסומה.

מה קורה אם f לא חסומה גלובלית?

$$\begin{aligned} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

יש פתרון גלובלי, $y = e^x$.

$$\begin{aligned} y' &= y^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

אין קיום גלובלי, כי הפתרון הוא $\frac{1}{1-y}$. ננסה למצוא פתרון גלובלי במצב זה, על ידי מציאת פתרון במלבן ואז לקיחת קצה המלבן כתנאי ההתחלה החדש, והרחבת הפתרון. נשמור את הסימונים מהמשפט הלוקלי, ואז

$$\alpha_i = \min \left\{ \frac{b_i}{M_i}, a_i \right\}$$

אבל f לא תלויה בערך x , ולכן $\alpha_i = \frac{b_i}{M_i}$. נחשב b_i שייתן α_i מקסימלי. נשים לב כי

$$M_i = \max_{|y-y_i| \leq b_i} |f(y)| = \max_{|y-y_i| \leq b_i} |y^2| = (y_i + b_i)^2$$

כלומר

$$\alpha_i = \max_{b_i > 0} \frac{b_i}{(y_i + b_i)^2}$$

מקסימום זה מתקבל כאשר $b_i = y_i$, וערכו $\alpha_i = \frac{1}{4y_i}$ (לבדוק בבית). לכן, כאשר $y \rightarrow \infty$, אורכי הקטעים α_i שואפים לאפס, ולכן יכול להיות שלא נמצא פתרון גלובלי. בדוגמה הקודמת, נקבל שאורכי הקטעים הם תמיד לפחות $\frac{1}{2}$ בשיטה הזו, ואז כן יהיה קיום גלובלי. כעת נתבונן בדוגמה

$$y' = \frac{1}{2y}$$

$$y(0) = 1$$

אז f מתפוצצת באפס. נפתור:

$$2yy' = 1$$

$$y^2 = x + c = x + 1$$

$$y = \sqrt{x+1}$$

הפתרון נשבר בנקודה 1-. הפתרון לא מתפוצץ בנקודת השבירה, אלא יוצא מתחום ההגדרה של $f(x, y)$ שהוא

$$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

האם יש עוד אפשרויות? לא!

משפט 2.2 תהי $f(x, y)$ גזירה ברציפות בתחום הפתוח $D \subseteq \mathbb{R}^2$. אזי לכל $(x_0, y_0) \in D$, למשוואה $y' = f(x, y)$ קיים פתרון יחיד לוקאלי המקיים את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$. יהי $[x_0, x^*)$ הקטע המקסימלי בו פתרון זה קיים. אם $x^* < \infty$, אזי כאשר $x \rightarrow x^*$, או שהנקודות $(x, y(x))$ שואפות לשפת התחום D , או שהערך $y(x)$ לא חסום.

הוכחה: נוכיח תחילם שקיים פתרון מקסימלי, כלומר קיים קטע מקסימלי בו קיים פתרון (שהוא יחיד). נגדיר

$$S = \{y(x) \mid y \text{ solves the system on interval } [x_0, x_1]\}$$

ממשפט קיום ויחידות לוקלי, S לא ריקה. נגדיר

$$x^* = \sup_{y \in S} \{x_1\} \leq \infty$$

לכל $x \in [x_0, x^*]$ הערך של $y(x)$ מזדהה עבור כל הפתרונות בתוך S שעבורם $x_1 > x$.
 לכן $y(x)$ מוגדר היטב והוא הפתרון היחיד של הבעיה בקטע $[x_0, x^*]$. אם $x^* = \infty$, סיימנו.
 אם הוא סופי, $y(x)$ לא חסומה כאשר $x \rightarrow x^*$, אז גם סיימנו. לכן, נניח שהיא חסומה,
 ונראה שמתקיים

$$(x, y(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x^*} \partial D$$

נבחר סדרה $x_n \rightarrow x^*$. מכיוון שהסדרה $(x_n, y(x_n))$ חסומה, יש לה תת סדרה מתכנסת
 לנקודת הצטברות (x^*, y^*) . נותר להראות כי (x^*, y^*) נמצאת על השפה. נוכיח בדרך
 השלילה.

נניח כי (x^*, y^*) נקודה פנימית של D . לכן, קיים $\varepsilon > 0$ כך שהריבוע $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon) \times (y^* - \varepsilon, y^* + \varepsilon) = R$
 נסמן

$$M = \sup_R |f|$$

כיוון שהפונקציה f רציפה, אזי $M < \infty$. נגדיר $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4M} \right\}$. נגדיר מלבן נוסף:

$$G = (x^* - \delta, x^* + \delta) \times \left(y^* - \frac{\varepsilon}{2}, y^* + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

היות ויש שאיפה $(x_n, y_n) \rightarrow (x^*, y^*)$, קיים n_0 המקיים $(x_{n_0}, y_{n_0}) \in G$. נגדיר
 סביבה את המלבן:

$$\tilde{G} = (x_{n_0} - \delta, x_{n_0} + \delta) \times \left(y_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2}, y_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

מלבן זה חייב עדיין להיות בתוך R , ולכן

$$\max_{\tilde{G}} |f| \leq M$$

ממשפט הקיום והיחידות הלוקלי, עבור

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_{n_0}) &= y_{n_0} \end{aligned}$$

קיים פתרון יחיד בקטע $(x_{n_0} - \alpha, x_{n_0} + \alpha)$ כאשר

$$\alpha = \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{2M} \right\} = \delta$$

■

לכן בפרט אפשר להמשיך את הפתרון אחרי x^* , בסתירה.

3 שיטות גרפיות

3.1 שדה כיוונים

נתבונן במשוואה $y' = f(x, y)$, ונניח כי $y(x)$ פתרון. שיפוע המשיק בנקודה מסויימת הוא $y' = f(x, y)$. לכן כיוון המשיק הוא $(1, f)$.

הגדרה 3.1 שדה כיוונים הוא פונקציה המתאימה לכל נקודה (x, y) כיוון.

רעיון נשרטט את שדה הכיוונים שמתאים לנקודה (x, y) את הוקטור $(1, f)$ או את הווקטור המנורמל $\frac{(1, f)}{\sqrt{1+f^2}}$ (במטלאב: quiver).