

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

30 במרץ 2017

נמשיך מאיפה שעצרנו. הוכחה: נראה כי האיטרציות

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) \, ds$$

מתכנסות. ראינו כי הן מוגדרות, רציפות ומקיימות

$$|y_n(x) - y_0| \leq b$$

כמו כן

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{ML^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

לכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ML^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L} (e^{L\alpha} - 1)$$

לכן מבוחן M של וויירשטראס נקבל כי הטור באגף שמאל מתכנס בהחלט ובמידה שווה על הקטע I_α . לכן הסדרה

$$y_n(x) - y_0 = \sum_{m=0}^{n-1} (y_{m+1}(x) - y_m(x))$$

מתכנסת במידה שווה בקטע I_α . נסמן $y(x) = \lim y_n(x)$. אזי,

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) \, ds$$

ניקח גבול:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) \, ds$$

ולכן קיבלנו פיתרון למשוואה שרצינו. בנוסף, $y(x)$ רציפה, כי היא גבול במידה שווה של פונקציות רציפות.

ראינו כבר כי הליפשיציות של f נותנת יחידות של הפתרון. נוכיח כעת בדרך שונה, תוך שימוש בהצגה האינטגרלית. נניח כי $\bar{y}$ פתרון נוסף של המשוואה.. אזי

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) - y(x) &= \int_{x_0}^x (f(s, \bar{y}(s)) - f(s, y(s))) \, ds \\ |\bar{y}(x) - y(x)| &= \int_{x_0}^x |f(s, \bar{y}(s)) - f(s, y(s))| \, ds \leq L \int_{x_0}^x |\bar{y}(s) - y(s)| \, ds \leq \\ &\leq L |x - x_0| \max_{x \in [x_0, x]} |\bar{y}(x) - y(x)| \end{aligned}$$

נוכיח תחילה יחידות עבור $\{x \in I_L : |x - x_0| \leq \frac{1}{2L}\}$ שם:

$$|\bar{y}(x) - y(x)| \leq L \frac{1}{2L} \max |\bar{y}(x) - y(x)|$$

זה נכון לכל $x \in I_L$ לכן

$$\begin{aligned} \max |\bar{y} - y| &\leq \frac{1}{2} \max |\bar{y} - y| \\ \max |\bar{y} - y| &= 0 \end{aligned}$$

כעת, נוכל להזיז את תנאי ההתחלה לצדדים בקפיצות של $\frac{1}{2L}$, ולקבל יחידות בקטעים שהולכים וגדלים - ולכן בסופו של דבר נכסה את הכל. ■

משפט 0.1 (משפט קיום ויחידות לשכבה אינסופית) נתונה השכבה האינסופית

$$R = [a, b] \times (-\infty, \infty)$$

תהי $f(x, y)$ רציפה על R , ומקיימת תנאי ליפשיץ עם קבוע L . תהי $x_0 \in [a, b]$ אזי לכל $y_0 \in \mathbb{R}$ קיים פתרון יחיד למערכת

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

ופתרון זה מוגדר בכל הקטע $[a, b]$.

הוכחה: דומה מאוד לקודמת. הבדל אחד הוא שכעת $|f|$ לא חסומה בתחום. היכן השתמשנו בזה?

1. $y_n(x)$ מוגדרת, רציפה, וכן $(x, y_n(x)) \in R$. זה ינבע מיידית באינדוקציה מהנוסחה עבור y_n , כי אין הגבלה על ערכי y . כמו כן, מאותה סיבה, אנחנו לא צריכים את ההגבלה של $|x - x_0| \leq \alpha$, וניתן להוכיח ישירות עבור $x \in [a, b]$.

2. כאשר הוכחנו כי לכל $x \in I_\alpha$ מתקיים

$$|y_{n+1}(x) - y(x)| \leq \frac{ML^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

הוכחנו באינדוקציה: בבסיס,

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds \right|$$

הפונקציה $f(x, y_0)$ תלויה רק במשתנה x וכן רציפה, ולכן חסומה על $[a, b]$. לכן נוכל לחסום

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq M(x - x_0)$$

בצעד האינדוקציה כבר לא הסתמכנו על החסימות, אלא רק על הליפשיציות. לכן כל שאר ההוכחה כמו קודם.

■

המשפט הזה לא דורש תנאי ליפשיץ גלובלי בכל השכבה, ולכן, למשל, לא תופס עבור $f = y^2$. למשוואה שזה מגדיר כן קיים הפתרון $y = \frac{1}{1-x}$, אם $y(0) = 1$, אבל הפתרון לא קיים בקטע $[-2, 2]$, למרות שהפונקציה f גזירה שם. מסתבר שאת דרישת הליפשיץ צריך רק בשביל יחידות. יש משפט כללי:

משפט 0.2 (משפט הקיום של פיאנו) נתונה המערכת

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

אם f רציפה על $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ וכן על מלבן זה $|f(x, y(x))| \leq M$, אזי קיים לפחות פתרון אחד למערכת בקטע $[x - \min\{a, \frac{b}{M}\}, x + \min\{a, \frac{b}{M}\}]$ שמקיים את ההתחלה.

דרשנו פחות (רק רציפות ולא ליפשיץ) וקיבלנו פחות (רק קיום ולא יחידות). לא נוכיח את המשפט, אבל נראה את האיטרציות שבהן משתמשים - איטרציות טונלי. עבור $x \in [0, \alpha]$

$$y_n(x) = \begin{cases} y_0 & x \in [0, \frac{\alpha}{n}] \\ y_0 + \int_0^{x-\frac{\alpha}{n}} f(s, y_n(s)) ds & \text{otherwise} \end{cases}$$

דוגמא נתבונן במשוואה

$$y' = y^{\frac{1}{3}}$$
$$y(1) = 3$$

לפי פיקארד, קיים פתרון יחיד סביב $(x_0, y_0) = (1, 3)$. רציפה בכל נקודה שאינה 0. לכן, $f(x, y) = y^{\frac{1}{3}}$ והנגזרת לפי y רציפה בכל נקודה שאינה 0. לכן,