

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

29 במרץ 2017

1 רציפות ויחידות

בשיעור שעבר ראינו:

למה 1.1 תהי $\sigma(x)$ פונקציה גזירה המקיימת את אי השוויון הדיפרנציאלי

$$\sigma'(x) \leq L\sigma(x)$$

כאשר $x_0 \leq x$ אזי

$$\sigma(x) \leq \sigma(x_0) e^{L(x-x_0)}$$

משפט 1.2 (רציפות בתנאי התחלה) יהיו $y_2(x), y_1(x)$ שני פתרונות של $y' = f(x, y)$. אם f מקיימת תנאי ליפשיץ עם קבוע L אזי

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq e^{L|x-x_0|} |y_2(x_0) - y_1(x_0)|$$

הוכחה: נגדיר

$$\sigma(x) = (y_2(x) - y_1(x))^2$$

לכן

$$\sigma'(x) = 2(y_2 - y_1)(y_2' - y_1') = 2(y_2 - y_1)(f(x, y_2) - f(x, y_1))$$

ומכאן

$$\begin{aligned} \sigma' &\leq 2|y_2 - y_1| |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq 2|y_2 - y_1| \cdot L|y_2 - y_1| = \\ &= 2L(y_2 - y_1)^2 = 2L\sigma \end{aligned}$$

לכן בסך הכל נקבל כי

$$\sigma' \leq 2L\sigma$$

ולכן מהלמה

$$\sigma \leq \sigma(x_0) e^{2L(x-x_0)}$$

עבור $x \geq x_0$.
נוציא שורש ונקבל

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq |y_2(x_0) - y_1(x_0)| e^{L|x-x_0|}$$

לכן סיימנו עבור $x \geq x_0$. עבור $x < x_0$, נבצע החלפת משתנים $x \mapsto -x$ ונקבל

$$s = -x$$

ואז

$$y' = -f(-s, y) = \tilde{f}(s, y)$$

וכעת באגף ימין עדיין יש פונקציה ליפשיץ. ההוכחה שלנו נכונה כעת עבור

$$\begin{aligned} s &\geq -x_0 \\ -x &\geq -x_0 \\ x &\leq x_0 \end{aligned}$$

■

המשפט מראה שהפתרון רציף בתנאי ההתחלה. כלומר, שאם $y_2(x_0) \rightarrow y_1(x_0)$ אזי $y_2(x) \rightarrow y_1(x)$ - שינויים קטנים בתנאי ההתחלה מביאים לשינויים קטנים בפתרון. הקבוע הכיפלי עלול להיות אדול אקספוננציאלי.

מסקנה 1.3 (יחידות) נתונה בעיית תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

אם f מקיימת תנאי ליפשיץ, אז קיים לכל היותר פתרון אחד.

הוכחה: נניח שיש שני פתרונות y_1, y_2 . לפי משפט קודם

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq e^{L|x-x_0|} |y_2(x_0) - y_1(x_0)| = 0$$

■

כאשר L קבוע הליפשיץ של L . לכן $y_2(x) = y_1(x)$.

לכן, מרציפות בתנאי התחלה נובעת יחידות.

משפט 1.4 (אי שוויון גרנוול) יהיו $\delta, \varepsilon, L \geq 0$. אזי כל פתרון של אי השוויון האינטגרלי

$$E(x) \leq \delta + \varepsilon x + L \int_0^x E(s) \, ds$$

כאשר $x \geq 0$ מקיים גם את החסם

$$E(x) \leq \delta e^{Lx} + \varepsilon \frac{e^{Lx} - 1}{L}$$

הוכחה: נגדיר

$$G(x) = \int_0^x E(s) \, ds$$

ואז

$$G'(x) \leq \delta + \varepsilon x + LG(x)$$

אזי

$$G'(x) - LG(x) \leq \delta + \varepsilon x$$

$$(Ge^{-Lx})' = e^{-Lx}(\delta + \varepsilon x)$$

$$G(x)e^{-Lx} - G(0)e^{-0} \leq \int_0^x e^{-Ls}(\delta + \varepsilon s) \, ds$$

$$Ge^{-Lx} \leq \delta \frac{1 - e^{-Lx}}{L} + \varepsilon \frac{1 - (1 + Lx)e^{-Lx}}{L^2}$$

$$G \leq \delta \frac{e^{Lx} - 1}{L} + \frac{\varepsilon}{L} \frac{e^{Lx} - 1 - Lx}{L}$$

כעת נציב את החסם עבור $G(x)$ באי שוויון המקורי ונקבל

$$\begin{aligned} E(x) &\leq \delta + \varepsilon x + LG \leq \delta + \varepsilon x + \delta(e^{Lx} - 1) + \varepsilon \frac{e^{Lx} - (1 + Lx)}{L} = \\ &= \delta e^{Lx} + \varepsilon \frac{e^{Lx} - 1}{L} \end{aligned}$$

■

משפט 1.5 (רציפות חזקה יותר) יהיו y_1, y_2 פתרונות של

$$y'_i = f_i(x, y_i)$$

בקטע $[a, b]$. נניח שלכל $a \leq x \leq b$ ולכל $y \in \mathbb{R}$ מתקיים:

1. f_1 או f_2 מקיימות תנאי ליפשיט עם קבוע L .

2.

$$|f_2(x, y) - f_1(x, y)| \leq \varepsilon$$

כמו כן, נניח כי עבור $x_0 \in [a, b]$ מתקיים

$$|y_2(x_0) - y_1(x_0)| \leq \delta$$

אזי לכל $a \leq x \leq b$ מתקיים

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq \delta e^{L|x-x_0|} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L|x-x_0|} - 1)$$

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות, $x_0 = 0$, כי אחרת נגדיר $\tilde{x} = x - x_0$. כמו כן, בלי הגבלת הכלליות, $x > 0$, כי אחרת נגדיר $\tilde{x} = -x$. לבסוף, בלי הגבלת הכלליות, f_1 ליפשיץ. כעת,

$$\begin{aligned} \left| y_2(x) - y_2(0) - \int_0^x f_1(s, y_2(s)) \, ds \right| &= \left| \int_0^x (y'_2(s) - f_1(s, y_2(s))) \, ds \right| = \\ &= \left| \int_0^x f_2(s, y_2) - f_1(s, y_2) \, ds \right| \leq \int_0^x |f_2(s, y_2) - f_1(s, y_2)| \, ds \leq \\ &\leq \varepsilon \int_0^x ds = \varepsilon x \end{aligned}$$

כעת נגדיר

$$E(x) = |y_2(x) - y_1(x)|$$

וכעת

$$\begin{aligned} E(x) &= |A - B + C + D| \\ A &= \left(y_2(x) - y_2(0) - \int_0^x f_1(s, y_2(s)) \, ds \right) \\ B &= \left(y_1(x) - y_1(0) - \int_0^x f_1(s, y_1(s)) \, ds \right) \\ C &= (y_2(0) - y_1(0)) \\ D &= \left(\int_0^x f_1(s, y_2(s)) \, ds - \int_0^x f_1(s, y_1(s)) \, ds \right) \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} E(x) &\leq |A| + |B| + |C| + |D| \leq \\ &\leq \varepsilon x + 0 + \delta + \int_0^x |f_1(s, y_2) - f_1(s, y_1)| \, ds \leq \\ &\leq \varepsilon x + \delta + L \int_0^x |y_2 - y_1| = \varepsilon x + \delta + L \int_0^x E(s) \, ds \end{aligned}$$

■

לכן התוצאה נובעת מתוך אי שוויון גרונול.

2 קיום פתרונות

נתבונן במערכת

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

נניח כי:

1. רציפה כפונקציה כל שני משתנים בלתי תלויים.

2. $y(x)$ רציפה.

לכן, נובע כי $f(x, y(x))$ רציפה בנקודה x , ולכן אינטגרלית.

$$\int_{x_0}^x y' dx = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

הוכחנו שאם y פתרון של המערכת שלמעלה, הוא פתרון גם של המשוואה הזו. בכיוון ההפוך, נניח כי y פתרון של המשוואה האחרונה. $f(x, y(x))$ רציפה, ולכן ניתן לגזור את שני צדדי המשוואה:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

וכן אם נציב $x = x_0$ נקבל

$$y(x_0) = y_0$$

לכן יש גרירה גם בכיוון ההפוך. לכן נותר לנו לפתור את המשוואה אינטגרלית הזו. אינטואיטיבית, עדיף לפתור דברים אינטגרליים, כי אינטגרל הוא אופרטור יפה, בניגוד לגזירה - הוא שומר חסמים.

2.1 שיטת האיטרציות של פיקארד

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0(s)) ds$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds$$

הרעיון - אם הסדרה מתכנסת לאיזושהי פונקציה $y(x)$, אזי

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

כמו שרצינו.

משפט 2.1 (קיום ויחידות לוקלי) נתון המלבן

$$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

ונניח כי $f(x, y)$ מוגדרת ורציפה בתוך R , ומקיימת שם תנאי ליפשיץ עם קבוע L . נסמן

$$M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$$

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

אזי בקטע $I_\alpha = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ קיים למשוואה $y' = f(x, y)$ פתרון יחיד המקיים $y(x_0) = y_0$.

הערה 2.2 $\max_R |f|$ סופי כי f רציפה (משפט ויירשטראס). המשפט מבטיח קיום לוקלי בלבד, כי אולי $\alpha < a$.
הערך של α תלוי אולי בגודל M , אבל לא בחסם L .

הוכחה: נוכיח קיום פתרון עבור $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$ - בחצי השני של הקטע ההוכחה נובעת על ידי $x \mapsto -x$ (בדקו).
ראשית, נוכיח שלכל n , הפונקציה $y_n(x)$, איטרציית פיקרד בשלב n , היא מוגדרת, רציפה ומקיימת

$$|y_n(x) - y_0| \leq b$$

נעשה זאת באינדוקציה.
בסיס: $n = 0$ - ברור:

$$|y_0(x) - y_0| = 0$$

צעד: נניח נכוונת עבור y_n . כעת,

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) \, ds$$

על פי הנחת האינדוקציה, $y_n(x)$ מוגדרת ורציפה, ומקיימת $|y_n(x) - y_0| \leq b$. לכן $f(s, y_n(s))$ מוגדרת, רציפה וחסומה. לכן $y_{n+1}(x)$ מוגדרת ורציפה. כמו כן

$$|y_{n+1}(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f| \leq M(x - x_0) \leq M\alpha \leq b$$

כעת, נוכיח כי לכל $x \in I_\alpha$ מתקיים

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{ML^n(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוכיח שוב באינדוקציה. בסיס:

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(s, y_0) \, ds \right| \leq M(x - x_0)$$

כעת, נניח נכונות עבור n , ונוכיח את הצעד:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))) \, ds \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |(f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s)))| \, ds \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^x |y_n(s) - y_{n-1}(s)| \, ds \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^x \frac{ML^{n-1}(x-x_0)^n}{n!} \, ds = \\ &= \frac{ML^n(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

■

המשך בשיעור הבא.