

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

23 במרץ 2017

1 משוואות מדויקות

נמשיך מהשיעור שעבר: נתונה משוואה לא מדויקת

$$Mdx + Ndy = 0$$

מחפשים $\mu(x, y)$ שעבורה המשוואה הבה מדויקת:

$$\mu Mdx + \mu Ndy = 0$$

כלומר נרצה שיתקיים

$$\begin{aligned}(\mu M)_y &= (\mu N)_x \\ \mu_y M + \mu M_y &= \mu_x N + \mu N_x\end{aligned}$$

זו משוואה דיפרנציאלית חלקית לינארית. קשה לפתור דבר כזה.
האם בכלל אמור להיות קיים גורם אינטגרציה?

טענה 1.1 למשוואה שלעיל תמיד קיים גורם אינטגרציה μ .

הוכחה: בהמשך הקורס נוכיח משפט קיום ויחידות פתרון למשוואה מהצורה הזו. נסמן את הפתרון $F(x, y(x)) = c$. נגזור לפי x :

$$F_x + F_y y' = 0$$

כלומר

$$-\frac{M}{N} = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

כלומר

$$\frac{F_x}{M} = \frac{F_y}{N} = \mu(x, y)$$

ואז

$$F_x = M\mu$$

$$F_y = N\mu$$

■

והמשוואה מדויקת.

ניתן לחשב את גורם האינטגרציה במקרים מיוחדים.

1. נניח $\mu = \mu(x)$, כלומר $\mu_y = 0$.

$$\begin{aligned}\mu M_y &= \mu_x N + \mu N_x \\ \mu(M_y - N_x) &= \mu_x N \\ \frac{\mu_x}{\mu} &= \frac{M_y - N_x}{N} \\ \mu &= e^{\int^x \frac{M_y - N_x}{N}}\end{aligned}$$

דוגמא

$$\underbrace{(y + xy + \sin y)}_M dx + \underbrace{(x + \cos y)}_N dy = 0$$

$$M_y = 1 + x + \cos y$$

$$N_x = 1$$

ולכן המשוואה לא מדויקת. נבדוק האם קיים $\mu = \mu(x)$.

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x + \cos y}{x + \cos y} = 1$$

וזה לא תלוי במשתנה y , ולכן יש $\mu = \mu(x)$. נגדיר

$$\mu = e^{\int^x \frac{M_y - N_x}{N}} = e^{\int^x 1} = e^x$$

לכן

$$e^x (y + xy + \sin y) dx + e^x (x + \cos y) dy = 0$$

מדויקת. לבית, וודאו שזו אכן מדויקת ושהפתרון הוא

$$F = xye^x + e^x \sin y = c$$

יש מקרים פרטיים נוספית, למשל $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ או באופן כללי $\mu = \mu(w(x, y))$ כאשר $w(x, y)$ פונקציה נתונה.

2 פתרון בעזרת הצבה

דוגמא נתבונן במשוואה

$$y'(x) = f(ax + by + c)$$

כאשר a, b, c קבועים. נציב

$$\begin{aligned}v(x) &= ax + by + c \\v'(x) &= a + by' = a + bf(ax + by + c) = a + bf(v)\end{aligned}$$

זו משוואה מופרדת, ולכן ניתן לפתור אותה:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{a + bf(v)} &= dx \\ \int_a^v \frac{dv}{a + bf(v)} &= x + c\end{aligned}$$

נבדוק פתרונות סטציונריים - אם קיים α עבורו $a + bf(\alpha) = 0$, אזי $v(x) = \alpha$ פתרון. אז

$$y = \frac{v - ax - c}{b} = \frac{\alpha - ax - c}{b}$$

פתרון של המשוואה.

לא נתעסק כאן בעוד שיטות הצבה - נראה בתרגול כמה.

3 רציפות ויחידות

נתבונן במערכת

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

שאלות לגבי המשוואה:

1. האם קיים פתרון?
 2. האם ייתכן שקיים יותר מפתרון אחד (יחידות)?
 3. האם הפתרון משתנה באופן רציף כתלות בערכים y_0, f (רציפות)?
- נתחיל לדון בשאלות 2,3.

הגדרה 3.1 פונקציה $f(x, y)$ מקיימת תנאי ליפשיץ בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אם קיים קבוע $L \geq 0$ כך שלכל זוג נקודות $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ מתקיים

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_2 - y_1|$$

נעיר שיש כאן אותו x בשתי הנקודות, L בלתי תלוי בנקודה (x, y) וכן y בלתי תלוי בערך x .

למה 3.2 תהי $f(x, y)$ גזירה ברציפות בתחום חסום סגור וקמור D . אזי מקיימת תנאי ליפשיץ בתחום D עם

$$L = \sup_D \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

הוכחה: נתבונן בהפרש

$$F(x, y_2) - F(x, y_1)$$

ממשפט ערך הביניים של לגראנז' מתקיים

$$F(x, y_2) - F(x, y_1) = (y_2 - y_1) \frac{\partial f}{\partial y}(x, \theta)$$

כאשר $y_1 < \theta < y_2$ לכן

$$|F(x, y_2) - F(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1| \sup_D \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

■

לכן נקבל כי גזירות גוררת ליפשיץ, אבל ההיפך לא בהכרח נכון. $F(y) = |y|$ ליפשיץ אבל לא גזירה.

ליפשיץ גורר גם רציפות, ונותן לנו חסם על קצב ההתכנסות של $f(y_n) \rightarrow f(y)$ אם $y_n \rightarrow y$.

למה 3.3 תהי $\sigma(x)$ פונקציה גזירה המקיימת את אי השוויון הדיפרנציאלי

$$\sigma'(x) \leq L \sigma(x)$$

כאשר $x_0 \leq x$ קבוע. אזי

$$\sigma(x) \leq \sigma(x_0) e^{L(x-x_0)}$$

לכל $x_0 \leq x$.

הוכחה: כשעובדים עם אי שוויונים מותר לעשות אינטגרל אבל לא לגזור. אם כן,

$$\sigma' - L\sigma \leq 0$$

נכפיל בגורם אינטגרציה:

$$\begin{aligned} e^{-Lx} (\sigma' - L\sigma) &\leq 0 \\ (e^{-Lx} \sigma)' &\leq 0 \\ e^{-Lx} \sigma(x) &\leq e^{-Lx_0} \sigma(x_0) \\ \sigma(x) &\leq \sigma(x_0) e^{L(x-x_0)} \end{aligned}$$

■

משפט 3.4 (רציפות בתנאי ההתחלה) יהי $y_0(x), y_1(x)$ שני פתרונות של $y' = f(x, y)$. אם f מקיים תנאי ליפשיץ עם קבוע L , אזי

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq e^{L|x-x_0|} |y_2(x_0) - y_1(x_0)|$$