

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

29 ביוני 2017

1 תורת פלוקה

דיברנו על מטוטלת, ועל היציבות של מטוטלת הפוכה מול חוסר יציבות של מטוטלת הפוכה. נרצה להוסיף תזוזה אנכית של

$$y(t) = A \cos(\omega t)$$

ומסתבר שאפשר להוציא ככה מאיזון את המטוטלת הרגילה, ולאזן את ההפוכה. ניתן להוכיח שתנועת המטוטלת כאן תינתן על ידי

$$\ddot{\theta} + (\omega^2 A \cos(\omega t) + \omega_0^2) \sin \theta = 0$$

עבור זוויות קטנות מספיק נכתוב

$$\ddot{\theta} + (\omega^2 A \cos(\omega t) + \omega_0^2) \theta = 0$$

זו צורה של משוואת היל:

$$\ddot{u} + a(t)u = 0$$

עבור a מחזורית. נעביר למערכת:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

תהי X המטריצה היסודית הטבעית. נשים לב שמתקיים $\text{Tr} A = 0$, ואז

$$X' = AX$$

$$X(0) = I_2$$

$$X(t+T) = X(t)B$$

כאשר $B = X(T)$. כדי לחשב את B נפתור את המשוואה עבור u . נצטרך תנאי התחלה

$$u_1(0) = 0, u_1' = 1$$

$$u_2(0) = 1, u_2' = 0$$

לכן

$$X(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u'_1(t) & u'_2(t) \end{pmatrix}$$

לכן

$$B = \begin{pmatrix} u_1(T) & u_2(T) \\ u'_1(T) & u'_2(T) \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם הפתרונות של

$$\rho^2 - \text{Tr}(B)\rho + \det(B) = 0$$

ידוע לנו

$$\det B = e^{\int_0^T \text{Tr}(A)} = 1$$

לכן יש לנו

$$\rho^2 - (u_1(T) + u'_2(T))\rho + 1 = 0$$

נכתוב

$$\rho^2 - 2\phi\rho + 1 = 0$$

ואז קיבלנו תלות של הערכים העצמיים רק בפרמטר האחד

$$\phi = \frac{u_1(T) + u'_2(T)}{2}$$

נפתור:

$$\rho_{1,2} = \phi \pm \sqrt{\phi^2 - 1}$$

נכתוב $\rho_i = e^{\mu_i T}$ ואז

$$\rho_1 \rho_2 = 1 \Rightarrow \mu_1 + \mu_2 = 0$$

$$\rho_1 + \rho_2 = 2\phi \Rightarrow \phi = \frac{e^{\mu_1 T} + e^{\mu_2 T}}{2} = \cosh(\mu T)$$

כאשר $\mu = \mu_1 = -\mu_2$. כעת נחלק למקרים.

1. $\phi > 1$, השורשים מקיימים

$$\rho_1 > 1 > \rho_2 > 0$$

ולכן

$$\mu_1 > 0 > \mu_2 = -\mu_1$$

אם כן הפתרון הוא

$$u(t) = c_1 e^{\mu t} p_1 + c_2 e^{-\mu t} p_2(t)$$

כאשר p_1, p_2 מחזוריות עם מחזור T . הפתרון לא מחזורי, והוא מתפוצץ בעיקרון - אלא אם $c_1 = 0$.

2. $\phi < -1$, השורשים מקיימים

$$\rho_2 < -1 < \rho_1 < 0$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{i\pi}{T} - r \\ \mu_2 &= -\mu_1 = r - \frac{i\pi}{T}\end{aligned}$$

עבור $r > 0$ ממשי. אזי

$$\begin{aligned}u(t) &= c_1 e^{\frac{i\pi}{T}t} e^{-rt} p_1(t) + c_2 e^{-\frac{i\pi}{T}t} e^{rt} p_2(t) = \\ &= c_1 e^{-rt} q_1(t) + c_2 e^{rt} q_2(t)\end{aligned}$$

כאשר q_1, q_2 בעלות מחזור $2T$. שוב אין פתרונות מחזוריים, והפתרון מתפוצץ אלא אם $c_2 = 0$.

3. $|\phi| < 1$ - השורשים מרוכבים. נכתוב

$$\rho_{1,2} = e^{\pm i\sigma T}$$

כלומר $\mu = \mu_1 = i\sigma = -\mu_2$ הפתרון הוא

$$u(t) = c_1 e^{i\sigma t} p_1(t) + c_2 e^{-i\sigma t} p_2(t)$$

אנחנו יודעים

$$\cosh(\mu T) = \phi$$

ולכן

$$\cos(\sigma T) = \phi$$

אם $|\phi| < 1$ אז נובע

$$0 < \sigma T < \pi$$

בלי הגבלת הכלליות (אפשר לחסר כפולות של 2π ולבחור את האופצייה החיובית). ככלל המחזוריים בפתרונות לא מצטלבים, אלא אם במקרה $\sigma T = \frac{2\pi}{m}$. ככלל זה פתרון לא מחזורי, אבל כן חסום.

4. $\phi = 1$ - נקבל ערך עצמי יחיד $\rho = 1$, $\mu = 0$. אם $B = I$, אזי $X(t+T) = X(t)$ וכל הפתרונות מחזוריים. אחרת, אנחנו בצורת ז'ורדן, והפתרון הוא מהצורה

$$u(t) = (c_1 + c_2 t) p(t)$$

כאשר $p(t)$ מחזורית. לכן ייתכן פתרון מחזורי T , אם $c_2 = 0$.

5. $\phi = -1$ - דומה, גם ייתכן פתרון מחזורי $2T$.

נניח שיש לנו משוואת Hill עם פרמטר:

$$u'' + (a(t) + \lambda)u = 0$$

נרצה לדעת איך משתנה אופי הפתרונות כתלות באותו λ . נחשב את $\phi(\lambda)$ (לרוב בצורה נומרית), ואז נוכל לדעת מתי נופלים באיזה מצב מהקודמים.