

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

28 ביוני 2017

1 משוואות לינאריות עם מקדמים מחזוריים

יש לנו המערכת

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

כאשר

$$A(t+T) = A(t)$$

לכל t . ראינו שאם $X(t)$ מטריצה יסודית אז גם $X(t+T)$ מטריצה יסודית. ראינו גם שמתקיים

$$X(t+T) = X(t)B$$

כאשר

$$\det B = e^{\int_0^T \text{tr}(A)}$$

ואפילו

$$B = X^{-1}(0)X(T)$$

אם X מטריצה יסודית טבעית אזי $B = X(T)$. כעת, יהא ρ ערך עצמי של B עם ווקטור עצמי $v \neq 0$. אזי

$$Bv = \rho v$$

נגדיר כעת

$$x(t) = X(t)v$$

ונקבל כי $x(t)$ פתרון של המשוואה (כי X מטריצה יסודית). בנוסף,

$$x(t+T) = X(t+T)v = X(t)Bv = \rho X(t)v = \rho x(t)$$

אם כן נקבל

$$x(t+kT) = \rho^k x(t)$$

לכן הערך העצמי קובע פי כמה יגדל פיתרון זה על פני מחזור. הפתרון מחזורי אם ורק אם $\rho = 1$. לא ייתכן $\rho = 0$, כי B הפיכה. לכן נוכל להגדיר

$$\rho = e^{\mu T}$$

כלומר

$$\mu = \frac{\ln \rho}{T}$$

במצבים כאלה אנחנו קוראים לערך העצמי ρ הכופל האופייני ולערך μ האקספוננט האופייני (הוא יכול להיות מרוכב). אם כן נכתוב

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\mu t} p(t) \\ p(t) &= e^{-\mu t} x(t) \\ p(t+T) &= e^{-\mu(t+T)} x(t+T) = e^{-\mu t} e^{-\mu T} \rho x(t) = \\ &= e^{-\mu t} x(t) = p(t) \end{aligned}$$

למעשה הוכחנו את המשפט הבא:

משפט 1.1 יהי ρ ערך עצמי של B , ויהי μ עם $e^{\mu T} = \rho$. אזי קיים פתרון $x(t)$ של המשוואה המקורית כך שלכל t מתקיים

$$x(t+T) = \rho x(t)$$

ובנוסף קיימת פונקציה מחזורית $p(t)$ עם מחזור T עם

$$x(t) = e^{\mu t} p(t)$$

לכל ערך עצמי ווקטור עצמי מתאים פתרון מחזורי כפול אקספוננט. יתכן כי μ מרוכב, כמו שאמרנו, למשל אם ρ שלילי או מרוכב בעצמו. כעת נעבור לדון בפתרון הכללי. נחלק למקרים:

1. המטריצה B לכסינה. קיימים ערכים עצמיים $\rho_1, \dots, \rho_n$ עם ווקטורים עצמיים $v_1, \dots, v_n$. לכן אפשר לכתוב $B = SDS^{-1}$ כאשר D אלכסונית. כעת,

$$X(t+T) = X(t) B$$

נגדיר $\tilde{X}(t) = X(t) S$, וזה גם פתרון יסודי של המערכת. בנוסף נוכל לכתוב

$$\tilde{X}(t+T) = X(t+T) S = X(t) B S = X(t) S D = \tilde{X}(t) D$$

כעת תהי $\tilde{x}_j(t)$ העמודה מספר j של $\tilde{X}(t)$. לכן $\tilde{x}_j(t)$ פתרון של המערכת, שמקיים

$$\tilde{x}_j(t+T) = \rho_j \tilde{x}_j(t)$$

לכן שוב נוכל לכתוב

$$\tilde{x}_j(t) = e^{\mu_j t} \tilde{p}_j(t)$$

כאשר $\rho_j = e^{\mu_j T}$, $\tilde{p}_j(t)$ מחזורית עם מחזור T . הפתרון הכללי הוא

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\mu_j t} p_j(t)$$

למשל, קיים פתרון מחזורי עם מחזור T אם ורק אם יש ערך עצמי $\rho_i = 1$, כלומר $\mu_i = 0$ אם $\rho_i < 0$ נקבל

$$\mu_i = \frac{i\pi}{T} + r_i$$

כאשר $r_i \in \mathbb{R}$ ואז

$$e^{\mu_i t} p_j(t) = e^{r_i t} \underbrace{e^{\frac{i\pi t}{T}}}_{\text{period}=2T} \underbrace{p(t)}_{\text{period}=T}$$

$\text{period}=2T$

לכן נקבל שהפתרון הזה הוא אקספוננט כפול פונקציות מחזוריות $2T$.

2. B לא לכסינה - כלומר $J, S^{-1}BS = J$ מטריצת ז'ורדן. שוב נקבל

$$\tilde{X}(t+T) = \tilde{X}(t) J$$

נניח שיש לנו ערך עצמי ρ עם ריבוי אלגברי k וריבוי גיאומטרי 1. k העמודות של $\tilde{X}(t)$ שמתאימות לבלוק הזה הן פתרונות של המערכת המקורית, שמקיימים (ניפטר מסימני $\sim$):

$$\begin{aligned} x_1(t+T) &= \rho x_1(t) \\ x_2(t+T) &= \rho x_2(t) + x_1(t) \\ &\vdots \\ x_k(t+T) &= \rho x_k(t) + x_{k-1}(t) \end{aligned}$$

עבור x_1 נקבל $x_1(t) = e^{\mu t} p(t)$ כאשר p מחזורית עם מחזור T . עבור x_2 נחפש פתרון מהתורה $x_2(t) = e^{\mu t} q(t)$. נציב:

$$\begin{aligned} x_2(t+T) &= e^{\mu(t+T)} q(t+T) = \rho x_2(t) + x_1(t) = \rho e^{\mu t} q(t) + e^{\mu t} p(t) \\ \rho q(t+T) &= \rho q(t) + p(t) \end{aligned}$$

אם כן נקבל

$$q(t+T) - q(t) = \frac{p(t)}{\rho}$$

ומכאן נקבל שהפתרון נתון על ידי

$$q(t) = \frac{t}{\rho T} p(t) + p_2(t)$$

כאשר $p_2(t)$ שוב מחזורית עם מחזור T . נראה שזה אכן עובד:

$$\begin{aligned} q(t+T) - q(t) &= \frac{t+T}{\rho T} p(t+T) - \frac{t}{\rho T} p(t) = \\ &= \frac{t+T}{\rho T} p(t) - \frac{t}{\rho T} p(t) = \frac{p(t)}{\rho} \end{aligned}$$

אם כן, קיבלנו

$$x_2(t) = \frac{t}{\rho T} e^{\mu t} p(t) + e^{\mu t} p_2(t)$$

תרגיל

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \frac{t(t-T)}{2(\rho T)^2} e^{\mu t} p(t) + \rho^{\mu t} p_3(t) \\ x_j(t) &= \frac{t(t-T) \cdots (t-(j-2)T)}{(j-1)!(\rho T)^{j-1}} e^{\mu t} p(t) + c_j e^{\mu t} p_j(t) \end{aligned}$$

בסך הכל, הפתרון הכללי ניתן לכתיבה בתור

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\mu t} q_i(t) p_i(t)$$

כאשר p_i מחזוריות, q_i פולינומים.

החולשה של התורה הזו היא שצריך לדעת את B כדי למצוא לה ערכים עצמיים, ובשבילה צריך למצוא מטריצה יסודית. נרצה לדעת אם אפשר לומר משהו על $\{\rho_i\}$, $\{\mu_i\}$ או אפילו רק על הפתרונות באופן מפורש?

דוגמה (מרקוס-יאמאבה) יש לנו המשוואה

$$x' = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{pmatrix} x$$

זמן המחזור הוא π , ואפשר לחשב את הערכים העצמיים שלה ולגלות שאינם תלויים במשתנה t :

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{4} (-1 \pm \sqrt{7}i)$$

החלק הממשי שלהם הוא שלילי. סביר לצפות שהפתרונות ידעו בזמן, אבל אפשר להראות שיש פיתרון

$$x = e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

דוגמה מטוטלת יש לנו חוט באורך l עם מסה זניחה. נסמן את הזווית של החוט ממרכז התנועה המעגלית שלו θ . בסוף החוט תלוייה מסה m , ועליה פועל כח הכבידה. נוכל לפרק את הכח לכיוון רדיאלי וכיוון טנגנציאלי ולקבל

$$m(\ddot{\theta}l) = -mg \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

כאשר $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. נכתוב כמערכת:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2 \sin x_1$$

נחפש פתרונות סטציונריים, עם $x_2 = 0$, ונקבל

$$\theta = n\pi, \dot{\theta} = 0$$

יש כאן שני סוגים של פתרונות - מטוטלת קבועה למטה (שנעריך שהוא יציב) וקבועה למעלה (שנעריך שאינו יציב). נצייר את הפתרונות במישור, בו כל ציר הוא פתרון, ונרצה לצייר את קווי הרמה. במקרה שלנו למשל נוכל לכתוב

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

ולכפול פי $\dot{\theta}$, ולקחת אינטגרל:

$$\int \dot{\theta} \ddot{\theta} + \omega_0^2 \dot{\theta} \sin \theta \, d\theta = c$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos \theta = c$$

$$\frac{1}{2} x_2^2 - \omega_0^2 \cos x_1 = c$$

ליד $(0, 0)$ הפתרונות נראים כמו אליפסות כי $\cos x_1 \approx 1 - \frac{1}{2}x_1^2$:

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x_1^2 = \tilde{c}$$

כלומר קווי הרמה הם אליפסות. אכן, שינוי קטן ידאג שנישאר באיזור של הפתרון. כעת נרצה לנתח את הנקודה השנייה, $(\pi, 0)$. אם כן,

$$x_1 \approx \pi$$

$$\varphi = \theta - \pi = x_1 - \pi$$

$$\cos(x_1) = \cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi) \approx -\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)$$

הפעם נקבל

$$\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{\omega_0^2}{2}(x_1 - \pi)^2 = \tilde{c}$$

כלומר קווי הרמה הם היפרבולות. הפעם שינוי קטן יגרום לנו לברוח מהנקודה. אפשר לצייר את המשוואה שיצאה לנו מראש (עם הקוסינוס) בכל מקום, ולראות איך זה מתנהג בכל המישור.