

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

22 ביוני 2017

1 תורת פלוקה (Floquet) למשוואות דיפרנציאליות רגילות עם מקדמים מחזוריים

נתחיל במקרה הסקלרי.

דוגמה

$$x'(t) = (1 + \sin t) x$$

זמן המחזור כאן הוא $T = 2\pi$. נפתור ונקבל

$$x(t) = ce^{\int 1 + \sin t} = ce^{t - \cos t}$$

יש כאן רכיב מחזורי, אבל הפתרון לא מחזורי - הוא לא חסום כאשר $t \rightarrow \infty$.

כעת נדון במקרה הסקלרי הכללי:

$$x' = a(t) x$$

$$x(0) = x_0$$

כאשר a מחזורית. הפתרון הוא

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t a(s) ds}$$

נסמן את הממוצע של a על פני מחזור:

$$\bar{a} = \frac{1}{T} \int_0^T a(s) ds$$

נסמן $p(t) = a(t) - \bar{a}$, אז, כמובן

$$\bar{p} = \bar{a} - \bar{a} = 0$$

כלומר האינטגרל הבא מתאפס

$$\int_t^{t+T} p(s) ds = 0$$

טענה 1.1 אם $b(t) = b(t+T)$ לכל t , אזי האינטגרל $\int_t^{t+T} b(s) ds$ הוא בלתי תלוי במשתנה s .

הוכחה:

$$\frac{d}{dt} \int_t^{t+T} b = b|_t^{t+T} = 0$$

■

כעת,

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t a} = x_0 e^{\int_0^t \bar{a} + p} = x_0 e^{\bar{a}t} e^{\int_0^t p}$$

ולכן

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x_0 e^{\bar{a}(t+T)} e^{\int_0^{t+T} p} = \\ &= x_0 e^{\bar{a}t} e^{\bar{a}T} e^{\int_0^t p} e^{\int_t^{t+T} p} = \\ &= e^{\bar{a}T} x_0 e^{\bar{a}t} e^{\int_0^t p} = e^{\bar{a}T} x(t) \end{aligned}$$

נסמן

$$\rho = e^{\bar{a}T}$$

ואז

$$\begin{aligned} x(t+T) &= \rho x(t) \\ x(t+kT) &= \rho^k x(t) \end{aligned}$$

מסקנה 1.2 הפתרון מחזורי אם ורק אם $\rho = 1$, אם ורק אם $\bar{a} = 0$. הפתרון לא חסום אם ורק אם $\rho > 1$, אם ורק אם $\bar{a} > 0$.

נרצה להכליל למערכת. ניקח את $x' = A(t)x$. ניזכר במטריצה היסודית Ψ , שהיא הפתרון של

$$\Psi' = A(t)\Psi$$

אם בנוסף $\Psi(0) = I$, היא נקראת יסודית טבעית.

משפט 1.3 תהי $X(t)$ מטריצה יסודית כלשהי של המשוואה עם המקדמים המחזוריים. אזי $X(t+T)$ היא גם מטריצה יסודית שלה, ובנוסף לכל t מתקיים

$$X(t+T) = X(t)B$$

כאשר B היא מטריצה קבועה, לא סינגולרית, שמקיימת

$$\det(B) = e^{\int_0^T \text{Tr}(A(s)) ds}$$

הוכחה: X מטריצה יסודית, ולכן

$$X' = A(t) X$$

לכל t (וכן $\det(X(t)) \neq 0$). לכן בפרט

$$X'(t+T) = A(t+T) X(t+T) = A(t) X(t+T)$$

וכן $\det(X(t+T)) \neq 0$. כעת, נסתכל בעמודה j של $X(t+T)$. עמודה זו היא פתרון של המשוואה, ולכן אפשר לפרוש אותה בעזרת עמודות $X(t)$:

$$X_j(t+T) = X(t) \cdot b_j$$

כאשר b_j ווקטור מקדמים כלשהו. אם כן, נגדיר B את המטריצה שעמודותיה b_j , ואז

$$X(t+T) = X(t) B$$

בגלל זה, פתרון של המשוואה ככלל אינו מחזורי. נציב $t=0$ ונקבל

$$B = X^{-1}(0) X(T)$$

ובפרט אם $X(t)$ היא יסודית טבעית, $X(0) = I$, אזי $B = X(T)$.
 כעת ניזכר בנוסחה לוורונסקיאן:

$$\det(X(t)) = W(t) = W(0) e^{\int_0^t \text{Tr}(A(s)) ds}$$

אם כן,

$$\begin{aligned} W(t+T) &= W(0) e^{\int_0^{t+T} \text{Tr}(A)} = W(0) e^{\int_0^t \text{Tr}(A)} e^{\int_t^{t+T} \text{Tr}(A)} = W(t) e^{\int_t^{t+T} \text{Tr}(A)} = \\ &= \det(X(t)) e^{\int_0^T \text{Tr}(A)} \end{aligned}$$

המעבר האחרון נכון ממחזוריות. אם כן,

$$W(t+T) = \det(X(t+T)) = \det(X(t) B) = \det(X(t)) \det B$$

ומכאן נקבל כמו שרצינו

$$\det B = e^{\int_0^T \text{Tr}(A(s)) ds}$$

■

הערה 1.4 נניח שהתחלנו ממטריצה יסודית אחרת $\tilde{X}(t)$. היינו מקבלים

$$\tilde{X}(t+T) = \tilde{X}(t) \tilde{B}$$

נשים לב שהמטריצה $\tilde{B}$ יכולה להיות שונה מהמטריצה B , אבל היות וכל שתי מטריצות יסודיות נבדלות במטריצה קבועה ולא סינגולרית, נסמן $\tilde{X}(t) = X(t)C$, ואז

$$\tilde{B} = \tilde{X}^{-1}(0) \tilde{X}(T) = C^{-1} X^{-1}(0) X(T) C = C^{-1} B C$$

ולכן הן דומות. בפרט יש להן אותם ערכים עצמיים.