

## משוואות דיפרנציאליות רגילות

© ארזים

21 ביוני 2017

### 1 התמרת לפלאס

בשיעור שעבר ראינו נוסחה להתמרת לפלאס של נגזרת - וזה מאפשר לנו להעביר בעיית תנאי התחלה עבור  $f(t)$  למשוואה אלגברית עבור  $F(s)$ , לפתור אותה (בקלות) ולהפוך את זה לתשובה בכיוון ההפוך.

דוגמה נפתור את

$$\begin{aligned}y'' + y &= \sin(2t) \\ y(0) &= 0, y'(0) = 1\end{aligned}$$

נתמיר את המשוואה:

$$\begin{aligned}s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) &= \mathcal{L}(\sin(2t)) \\ (s^2 + 1)Y(s) &= \mathcal{L}(\sin(2t)) + 1\end{aligned}$$

נזכור שראינו

$$\mathcal{L}(\sin(2t)) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

לכן נקבל בסך הכל

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)}$$

כעת נרצה להתמיר בחזרה. ההתמרה היא לינארית, ולכן גם ההפוכה. לכן נפרק את המנה הזו לגורמים פשוטים יותר, שכל אחד מהם אנחנו יודעים להתמיר לאחור (מהטבלה). נפרק לשברים חלקיים:

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{5}{3(s^2 + 1)} - \frac{2}{3(s^2 + 4)} = \mathcal{L}\left(\frac{5}{3}\sin t\right) - \mathcal{L}\left(\frac{1}{3}\sin(2t)\right) \\ \mathcal{L}^{-1}(Y) &= \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin(2t)\end{aligned}$$

**הערה 1.1** בניגוד לשיטות הקודמות, כאן לא פותרים קודם עבור  $y = y_p + y_H$  ואחר כך מציבים תנאי התחלה וכן הלאה. הכל בבת אחת. היתרון הוא שפותרים משוואה אלגברית, ולא דיפרנציאלית. החלק הקשה הוא לרוב ההתמרה ההפוכה - אם יש מזל אפשר לפרק לצירוף של התמרות מוכרות, ואז ההתמרה ההפוכה פשוטה. קיימת נוסחה מפורשת עבור ההתמרה ההפוכה שכוללת אינטגרציה במישור המרוכב.

**תזכורת**  $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$ , לכן,  $\mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = e^{at}f(t)$ .

**דוגמה** נחשב את

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - 4s + 5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2 + 1}\right) = \mathcal{L}^{-1}(F(s-2))$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s-2)) = e^{2t} \sin t$$

## 1.1 פונקציות מדרגה

ניקח פונקציה

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$

מתקיים

$$\mathcal{L}(u_c(t)) = \int_0^\infty u_c(t) e^{-st} dt = \int_c^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-cs}}{s}$$

נשתמש בזה כדי להזיז פונקציה בזמן - אם פונקציה  $f$  מתחילה באפס ורוצים להזיז אותה להתחיל בזמן  $c$ , לוקחים  $g(t) = u_c(t) f(t-c)$ .

**משפט 1.2** נניח כי  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$  מוגדר עבור  $s > a$ , ונניח כי  $c > 0$ . אזי

$$\mathcal{L}(u_c(t) f(t-c)) = e^{-cs} F(s), s > a$$

## 1.3 מסקנה

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-cs} F(s)) = u_c(t) f(t-c)$$

את אלה נוכיח בתרגיל.

דוגמה ניקח

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}$$

מהטבלה ידוע לנו כי  $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$ , ולכן

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2t} \frac{1}{s^2}\right) = t - u_2(t)(t-2) = \begin{cases} t & t \leq 2 \\ 2 & t \geq 2 \end{cases}$$

## 1.2 קונוולוציה

**הגדרה 1.4** בהינתן  $f, g$  פונקציות, הקונבולוציה שלהן:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

**תכונות**

$$1. f * g = g * f$$

$$2. f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$$

$$3. (f * g) * h = f * (g * h)$$

$$4. f * 0 = 0$$

הפעולה הזו דומה לכפל, אבל היא כמובן לא כפל:

$$f * 1 \neq f$$

ניקח  $f = \cos t$ :

$$f * 1 = \sin t$$

$$1 * 1 = t$$

## משפט 1.5 יהיו

$$F(s) = \mathcal{L}(f(s))$$

$$G(s) = \mathcal{L}(g(s))$$

ונניח כי  $f, g$  חסומות על ידי  $e^{at}$  לכל  $t \geq M$ . אזי לכל  $s \geq a$ ,

$$\mathcal{L}(f * g) = F(s) \cdot G(s)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f * g) &= \int_0^\infty e^{-st} (f * g)(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty f(t-\tau) g(\tau) u_0(t-\tau) d\tau dt = \int_0^\infty g(\tau) \underbrace{\int_0^\infty u_0(t-\tau) f(t-\tau) e^{-st} dt}_{e^{-s\tau} F(s)} d\tau = \\ &= F(s) \int_0^\infty g(\tau) e^{-s\tau} d\tau = F(s) G(s)\end{aligned}$$

■

נראה שימוש בקונוולוציה, מעבר להתמרה הפוכה של מכפלה. אפשר בעזרת זה לפתור משוואות אינטגרליות. למשל, יש לנו את מודל באס לשיווק - יש מוצר חדש, יש השפעה של אמצעי תקשורת  $p$ , השפעה של חברים  $q$ , ונוסחה הגיונית היא

$$n'(t) = (M - n(t)) \left( p + \frac{q}{M} n(t) \right)$$

כאשר  $n$  היא כמות המאמצים בזמן  $t$ ,  $M$  הוא גודל השוק. ידענו לפתור את זה בהפרדת משתנים ולקבל נוסחה, אבל יש כאן הנחה שנחשבת בעייתית - כולם משפיעים על כולם. נדבר כעת על מודל באס על רשת חברתית. ניקח מודל קיצוני לכיוון השני - כל אחד משפיע בדיוק על אדם אחד אחר, ומושפע מבן אחד אחר. אז ההסתברות שמישהו חדש יאמץ את המוצר גדלה אחרי שהמשפיע עליו אימץ. אם יש רק את  $p$ , כלומר  $q = 0$ , נקבל

$$n' = (M - n)p$$

אם נוסיף את  $q$  עכשיו:

$$n(t) \approx \int_0^t p(M - n(\tau))(1 + q(t - \tau)) d\tau$$

נחלק פי  $M$ , נגדיר  $f(t) = \frac{n(t)}{M}$  ונקבל

$$f(t) \approx \int_0^t p(1 - f(\tau))(1 + q(t - \tau)) d\tau = (p(1 - f(t))) * (1 + qt)$$

בגלל היחס בין ההתמרה לקונוולוציה נקבל את מכפלת ההתמרות, משמע

$$\begin{aligned}F &= p \left( \frac{1}{s} - F \right) \cdot \left( \frac{1}{s} + \frac{q}{s^2} \right) = \frac{p}{s^2} + \frac{pq}{s^3} - \frac{pF}{s} - \frac{pqF}{s^2} \\ F &= \frac{p}{s} \frac{s + q}{s^2 + ps + pq} = \frac{p(s + q)}{s(s - s_1)(s - s_2)}\end{aligned}$$

עבור

$$s_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4pq}}{2}$$

כעת,

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s-s_1} \frac{1}{s-s_2} \right) = \frac{1}{s_1-s_2} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2} \right) = \frac{1}{s_1-s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$$

ומשם אפשר להמשיך ולחשב עד הסוף (מאוד טכני ונשאר כתרגיל).