

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

15 ביוני 2017

1 טרנספורם לפלאס

נשוב לדון בתכונות של הטרנספורם.

משפט 1.1 אם $\mathcal{L}(f(t))$ מוגדר עבור $s > \alpha$ (כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$) ואם $a \in \mathbb{R}$, אזי

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = \mathcal{L}(f(t))(s - a)$$

לכל $s > a + \alpha$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at} f(t)) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} f(t) dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-\tilde{s}t} f(t) dt = \mathcal{L}(f(t))(\tilde{s}) = \mathcal{L}(f(t))(s - a)\end{aligned}$$

■

למשל,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at} e^{ibt}) &= \frac{1}{s - a - ib} \\ \mathcal{L}(e^{at} \cos(bt)) &= \frac{b}{(s - a)^2 + b^2}\end{aligned}$$

כמובן כאשר $s > a$.

משפט 1.2 תהי f גזירה למקוטעין בקטע $[0, T]$ (במשמעות של רציפה למקוטעין) לכל $T \geq 0$, וכמו כן

$$|f(t)| \leq k e^{at}$$

לכל $t \geq M$ אזי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\mathcal{L}(t^k f(t)) = (-1)^k F^{(k)}(s)$$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה. המקרה $k = 0$ ברור מההגדרה. כעת,

$$\begin{aligned} F^{(k+1)}(s) &= \frac{d}{ds} \left(F^{(k)}(s) \right) = (-1)^k \frac{d}{ds} \mathcal{L}(t^k f(t)) = \\ &= (-1)^k \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} t^k f(t) dt \end{aligned}$$

כעת, נראה שמותר להחליף גזירה ואינטגרציה:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} t^k f(t) dt &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \left(\int_0^\infty e^{-(s+\Delta s)t} t^k f(t) dt - \int_0^\infty e^{-st} t^k f(t) dt \right) = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_0^\infty \left(e^{-(s+\Delta s)t} - e^{-st} \right) t^k f(t) dt = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \left(\int_0^M \left(e^{-(s+\Delta s)t} - e^{-st} \right) t^k f(t) dt - \int_M^\infty \left(e^{-(s+\Delta s)t} - e^{-st} \right) t^k f(t) dt \right) \end{aligned}$$

בקטע $[0, M]$ יש לנו פונקציות רציפות במידה שווה, ולכן אפשר להכניס את הגבול כמו שרצינו. באינטגרל השני,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta s} \int_M^\infty \left(e^{-(s+\Delta s)t} - e^{-st} \right) t^k f(t) dt &= \int_M^\infty \frac{e^{-st}}{\Delta s} (e^{-\Delta s t} - 1) t^k f(t) dt \leq \\ &\leq [e^{-x} - 1 \leq x] \leq \int_M^\infty e^{-st} t^{k+1} f(t) dt \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned} F^{(k+1)}(s) &= (-1)^k \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} t^k f(t) dt = \\ &= (-1)^k \int_0^\infty -t e^{-st} t^k f(t) dt = \\ &= (-1)^{k+1} \int_0^\infty e^{-st} t^{k+1} f(t) dt = \mathcal{L}(t^{k+1} f(t)) \end{aligned}$$

■

מסקנה 1.3 $F(s) \in C^\infty$.

התמרות נפוצות:

$$1. F = \frac{1}{s}, f = 1$$

$$2. F = \frac{1}{s-a}, f = e^{at}$$

$$3. F = \frac{n!}{s^{n+1}}, f = t^n$$

1.1 פתרון משוואות דיפרנציאליות בעזרת טרנספורם לפלאס

אם יש לנו משוואה

$$y'' = \cos t + y$$

נפעיל את טרנספורם לפלאס (אם זה אפשרי):

$$g(Y(s)) = \frac{s}{s+1} + Y(s)$$

כאשר g היא איזשהו קשר שכעת נוכיח את טיבו:

משפט 1.4 אם $f(t)$ רציפה, $f'(t)$ רציפה למקוטעין בכל קטע $[0, A]$ וכן קיימים קבועים k, M עבורם

$$|f(t)| \leq ke^{at}$$

לכל $t \geq M$, אזי $\mathcal{L}(f'(t))$ מוגדר לכל $s > a$ ומתקיים

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

הוכחה: נסמן $t_1, \dots, t_n$ את נקודות אי הרציפות של f' בקטע $[A]$. אזי

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t) dt + \dots + \int_{t_n}^A e^{-st} f'(t) dt$$

בכל קטע קטן כזה, f' רציפה, ולכן נוכל לבצע אינטגרציה בחלקים.

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-st} f'(t) dt &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \dots + e^{-st} f(t) \Big|_{t_n}^A + \\ &+ s \left(\int_0^{t_1} e^{-st} f(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t) dt + \dots + \int_{t_n}^A e^{-st} f(t) dt \right) \end{aligned}$$

החלק הראשון הוא טלסקופי:

$$e^{-st} f(t) \Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \dots + e^{-st} f(t) \Big|_{t_n}^A = e^{-sA} f(A) - e^{-s \cdot 0} f(0) = e^{-sA} f(A) - f(0)$$

ולכן הגבול של החלק הזה כאשר לוקחים $A \rightarrow \infty$ הוא $-f(0)$, כי חסומה על ידי אקספוננט החל ממקום מסויים. כעת נטפל באינטגרלים. נוכל לאחדם, ולקבל

$$s \int_0^A e^{-st} f(t) dt$$

ולכן כאשר נשאיף את $A \rightarrow \infty$ נקבל

$$sF(s)$$

■

ובסך הכל סיימנו.

הערה 1.5 באינדוקציה,

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$