

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

14 ביוני 2017

1 אקספוננט המטריצה

מתבוננים במשוואה $X'(t) = PX(t)$ כאשר X, P מטריצות, P קבועה ביחס למשתנה t . ראינו שעבור תנאי ההתחלה $X(0) = I_n$ הפתרון הוא

$$X(t) = e^{Pt}$$

כאשר מגדירים

$$e^{Pt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n P^n}{n!}$$

נחזור למערכות של משוואות דיפרנציאליות, משמע $x'(t) = Ax(t)$, כאשר x ווקטור, A מטריצה קבועה. כאשר $x(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$.

טענה 1.1 הפתרון של המערכת הזו עם תנאי ההתחלה הזה הוא

$$x(t) = e^{tA} v_0$$

הוכחה: נציב במשוואה. אפשר לגזור, או שאפשר לשים לב שידוע לנו שמהשוואה המטריציאית הזו

$$(e^{At})' = Ae^{At}$$

מתקיימת, ולכן גם כפל מימין בווקטור שומר על זה. עבור תנאי ההתחלה:

$$x(0) = e^{A \cdot 0} v_0 = \text{Id} \cdot v_0 = v_0$$

■

כנדרש.

כעת נעבור לפתור מערכת משוואות לא הומוגנית:

$$x'(t) = Ax(t) + g(t)$$

כאשר x, g ווקטורים, A מטריצה קבועה.

טענה 1.2 הפתרון עבור תנאי ההתחלה $x(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$ הוא

$$x(t) = e^{At}v_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s) \, ds$$

כאשר האינטגרל הוא כמובן קואורדינטה-קואורדינטה.

הערה 1.3 זה עובר בדיקת קונסיסטנטיות - אם $g = 0$ נקבל את הפתרון של המערכת ההומוגנית.

בנוסף, אנחנו לא עוברים דרך פרישת מרחב הפתרונות של הבעיה ההומוגנית כלל.

הוכחה: (של הטענה) הפתרון הכללי של הבעיה ההומוגנית הוא $x_h(t) = e^{tA}c$, כאשר c ווקטור כלשהו. נלך בשיטת ווריאצית הפרמטרים, כלומר ננחש פתרון פרטי מהצורה

$$x_p = e^{tA}c(t)$$

כאשר c ווקטור. נגזור:

$$x_p'(t) = Ae^{tA}c(t) + e^{tA}c'(t)$$

מהמשוואה נרצה

$$Ae^{tA}c(t) + e^{tA}c'(t) = Ae^{tA}c(t) + g(t)$$

ולכן נקבל

$$e^{tA}c'(t) = g(t)$$

ראינו שמתקיים $e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$ ולכן נקבל

$$c'(t) = e^{-tA}g(t)$$

ומכאן

$$c(t) = \int_0^t e^{-sA}g(s) \, ds$$

אזי הפתרון הכללי הוא מהצורה

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{tA} \left(c + \int_0^t e^{sA}g(s) \, ds \right)$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$v_0 = x(0) = c + 0$$

ולכן הפתרון הוא

$$x(t) = e^{tA}v_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s) \, ds$$

וסיימנו. ■

נניח כעת כי $v_0 = 0$. אז

$$x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}g(s) \, ds$$

האיבר $e^{(t-s)A}g(s)$ הוא הפתרון לבעייה ההומוגנית בזמן t עם תנאי ההתחלה $x(s) = g(s)$. באופן אינטואיטיבי, אנחנו סוכמים בכל זמן $0 < s < t$ את תנאי ההתחלה $g(s)$. אפשר להבין את זה היטב על ידי סכומי רימן.

2 עקרון דוהמל (Duhamel)

נתונה משוואה לינארית הומוגנית:

$$\begin{aligned} u_t &= L(t)u \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

כאשר $u, u_0 \in \mathbb{R}^n$ וכן $L(t) \in M_n(\mathbb{R})$. נסמן עבור המערכת המטריציונית המתאימה

$$\begin{aligned} S_t &= L(t)S \\ S(t_0) &= \text{Id} \end{aligned}$$

כאשר $S \in M_n(\mathbb{R})$. אזי הפתרון למערכת המקורית הוא

$$u(t) = S(t, t_0)u_0$$

כאשר $S(t, t_0)$ היא הפתרון למערכת עם תנאי התחלה בנקודה t_0 .

תכונות של S .

1. $S(t, t) = \text{Id}$, שכן $u_0 = u(t_0) = S(t_0, t_0)u_0$ לכל $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

2.

$$S(t_2, t_0) = S(t_2, t_1) S(t_1, t_0)$$

שכן

$$S(t_2, t_0) u_0 = u(t_2) = S(t_2, t_1) u(t_1) = S(t_2, t_1) S(t_1, t_0) u_0$$

וזאת לכל $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

כעת, נפתור את הבעיה הלא הומוגנית בהינתן $S(t, t_0)$. הבעיה היא

$$\begin{aligned} v'(t) &= L(t) v(t) + g \\ v(t_0) &= v_0 \end{aligned}$$

משפט 2.1 (עקרון דוהמל)

$$v(t) = S(t, t_0) v_0 + \int_{t_0}^t S(t, \tau) g(\tau) d\tau$$

הערה 2.2 נניח כי קיים $T > 0$ עם $g(t) = 0$ לכל $t \notin [0, T]$. נסתכל על הפתרון עבור $t > T$

$$v(t) = S(t, t_0) v_0 + \int_0^T S(t, \tau) g(\tau) d\tau$$

קיבלנו "סכום" של פתרונות מתנאי התחלה שונים: $t_0 \rightarrow v_0$ ובכל $t \in [0, T]$ $t \rightarrow g(t)$

הוכחה: (של עקרון דוהמל) המשפט נכון רק אם יש יחידות לפתרון - כלומר אם $L(t)$ רציף. נגזור:

$$\begin{aligned} v_t &= S_t v_0 + \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t S(t, \tau) g(\tau) d\tau = \\ &= L(t) S v_0 + \int_{t_0}^t \frac{\partial S(t, \tau)}{\partial t} g(\tau) d\tau + S(t, t) g(t) = \\ &= L(t) S v_0 + \int_{t_0}^t L(t) S(t, \tau) g(\tau) d\tau + \text{Id} g(t) = \\ &= L(t) \left(S(t, t_0) v_0 + \int_{t_0}^t S(t, \tau) g(\tau) d\tau \right) + g(t) = \\ &= L(t) v(t) + g(t) \end{aligned}$$

ולכן המשוואה אכן מתקיימת. נותר להראות קיום תנאי התחלה:

$$\begin{aligned} v(t_0) &= S(t_0, t_0) v_0 + \int_{t_0}^{t_0} S(t_0, \tau) g(\tau) d\tau = \\ &= \text{Id} v_0 + 0 = v_0 \end{aligned}$$

■

ולכן סיימנו.

3 טרנספורם לפלאס

נניח שנותנים לנו חידה בסינית, ודורשים מאיתנו פתרון בסינית. אם אנחנו יודעים סינית, יופי. אחרת, אנחנו צריכים עזרה משלושה אנשים - מתורגמן סינית-עברית, שנותן לנו חידה בעברית; פותר חידות בעברית, שנותן לנו פתרון בעברית; ומתורגמן עברית-סינית, שנותן לנו פתרון בסינית. באופן דומה, ננית שיש לנו משוואה דיפרנציאלית במשתנה t , ונרצה לפתור אותה במשתנה s . אם נצליח לבצע לה "אינטגרציה", באחת מהשיטות שלמדנו, יופי. אחרת, נתרגם אותה לבעיה אלגברית במשתנה s על ידי טרנספורם לפלאס, שאותה נפתור פתרון אלגברי ונקבל פתרון במשתנה s , ונתרגם אותו בחזרה לפתרון במשתנה t בעזרת טרנספורם לפלאס ההפוך.

הטרנספורם

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

דוגמה

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 \\ F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-st} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \left. -\frac{e^{-st}}{s} \right|_0^M = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} 1 - \frac{e^{-sM}}{s} \\ F(s) &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

כאשר $s < 0$ זה מתבדר, ועבור $s > 0$ מתקיים

הגדרה 3.1 $f(t)$ תיקרא רציפה למקוטעין בקטע $[a, b]$ אם קיימת חלוקה למספר סופי של תתי קטעים, כך שבפנים של כל קטע f רציפה, ויש לה גבולות סופיים בקצוות.

משפט 3.2 אם f רציפה למקוטעין בכל קטע $[0, T]$, וכן הגבול של f כאשר $t \rightarrow \infty$ הוא לכל היותר אקספוננציאלי, משמע קיימים קבועים k, a, M עם

$$|f(t)| \leq ke^{at}$$

לכל $t \geq M$, אזי טרנספורם לפלאס מוגדר היטב לכל $s > a$.

הוכחה: נראה שעבור $s > a$, $\mathcal{L}(f(t))(s)$ מתכנס. נוכל לכתוב

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^M e^{-st} f(t) dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t) dt$$

האינטגרל הראשון כמובן חסום - אינטגרל של פונקציה חסומה ואינטגרלית על קטע סופי. נבדוק את האינטגרל השני:

$$\begin{aligned} \left| \int_M^\infty e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_M^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq \int_M^\infty e^{-st} k e^{at} dt = k \int_M^\infty e^{(a-s)t} dt = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} k \int_M^A e^{(a-s)t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} k \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \Big|_M^A \end{aligned}$$

וגבול זה מתכנס אם ורק אם $s > a$. לכן בפרט כאשר $s > a$ קיבלנו שהאינטגרל הזה חסום, וסיימנו. ■

תרגיל (בלי הוכחה) $\mathcal{L}$ לינארי בתחום הגדרתו, משמע

$$\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$$

$$\mathcal{L}(\alpha f) = \alpha \mathcal{L}(f)$$

הערה 3.3 באופן כללי, s עשוי להיות מרוכב!

בנוסף, באופן כללי, מתקיים

$$\mathcal{L}(e^{ibt}) = \frac{1}{s - ib}$$

ואת זה נראה מחר. מכאן יש מסקנה.

מסקנה 3.4

$$\mathcal{L}(\cos(bt)) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin(bt)) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

הוכחה:

$$\mathcal{L}(\cos(bt) + i \sin(bt)) = \mathcal{L}(e^{ibt}) = \frac{1}{s - ib} = \frac{s + ib}{s^2 + b^2}$$

כעת נוכל להשוות חלקים ממשיים ומדומים (בעזרת לינאריות) ולקבל את המסקנה. ■