

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

8 ביוני 2017

1 משוואות מטריציאליות

אנחנו עובדים עם המשוואה $x' = P(t)x$, כאשר x ווקטור, P מטריצה. לקחנו $\{x_1, \dots, x_n\}$ פתרונות בלתי תלויים (מערכת יסודית) המקיימים

$$x_j(0) = e_j$$

ואז הגדרנו

$$\Psi = (x_1, \dots, x_n)$$

מטריצה. ראינו שמתקיים

$$\Psi' = P\Psi$$

$$\Psi(0) = I$$

ולכן הפתרון של המערכת

$$x' = Px$$

עם תנאי ההתחלה

$$x(0) = x_0$$

עבור ווקטור x_0 מסויים הוא

$$x = \Psi x_0$$

נדון עכשיו במקרה בו $P(t)$ מטריצה קבועה, שנסמנה A . כלומר המערכת היא

$$x' = Ax$$

$$x(0) = x_0$$

ראינו שבמצב הסקלרי הדומה, הפתרון הוא $x = e^{At}x_0$. היינו רוצים לומר שהפתרון כאן הוא

$$x = e^{At}x_0$$

אבל מה זה e^{At} ?

הגדרה 1.1 נשתמש בהגדרה הטבעית של e^x כטור טיילור ונגדיר

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tA)^m}{m!}$$

נראה בהמשך שזה מתכנס ושהכל בסדר. בינתיים נניח לרגע שזה מתכנס. אזי

$$(e^{tA})' = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!} \right)' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{m-1} A^m}{(m-1)!} = A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^j}{j!} = A e^{tA}$$

מסקנה 1.2 המטריצה e^{tA} היא הפתרון של

$$\begin{aligned} \Psi' &= A\Psi \\ \Psi(0) &= I \end{aligned}$$

מסקנה 1.3 מתקיים $e^{tA} = (x_1, \dots, x_n)$ כאשר x_i הם הפתרונות של

$$\begin{aligned} x_i' &= Ax_i \\ x_i(0) &= e_i \end{aligned}$$

מסקנה 1.4 הווקטור $x = e^{At}x_0$ הוא הפתרון של

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

דוגמא ראינו את המערכת $x' = Ax$, עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, וראינו את הפתרונות

$$\begin{aligned} x_1' &= e^{3t} (1, 2)^T \\ x_2' &= e^{-t} (1, -2)^T \end{aligned}$$

כדי למצוא את e^{At} , צריך שני פתרונות בלתי תלויים עם $x_i = e_i$. אפשר למצוא אותם ולקבל

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \begin{pmatrix} \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \\ e^{3t} - e^{-t} \end{pmatrix} \\ x_2 &= \frac{x_1 - x_2}{4} = \begin{pmatrix} \frac{e^{3t} - e^{-t}}{4} \\ \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ומכאן נקבל

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$$

תרגיל אם $D = \text{diag}(d_i)$ אזי $e^D = \text{diag}(e^{d_i})$.

כעת נרצה להוכיח את ההתכנסות של e^{At} . בשביל זה נרצה להראות שני דברים: התכנסות של $(e^{tA})_{i,j}$, והתכנסות במידה שווה עבור $|t| \leq \alpha$.

הגדרה 1.5 נורמה מטריציאלית היא פונקציה $\|\cdot\| : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+$ המקיימת

$$1. \quad \|A\| \geq 0 \text{ לכל } A \text{ וכן } A = 0 \iff \|A\| = 0.$$

$$2. \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

$$3. \quad \|cA\| = |c| \|A\| \text{ לכל } c \in \mathbb{R}.$$

$$4. \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

נעיר שדרישות 1,2,3 הן של כל נורמה, והרביעית מיוחדת.

דוגמאות יש המון נורמות מטריציאליות. למשל:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

אפשר להראות שהנורמות האלה מקיימות את ההגדרה (נראה בתרגול). נשתמש למשל בנורמת $\|\cdot\|_F$. נשים לב כי

$$|A_{ij}| \leq \|A\|_F$$

לכן

$$\left| \left(\frac{A^k t^k}{k!} \right)_{i,j} \right| \leq \left\| \frac{A^k t^k}{k!} \right\|_F \leq \frac{|t|^k}{k!} \|A\|_F^k$$

ומכאן

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{t^m A^m}{m!} \right)_{i,j} \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|t|^m \|A\|_F^m}{m!} \leq e^{|t| \|A\|_F} \leq e^{\alpha \|A\|_F}$$

ולכן אכן יש התכנסות במידה שווה ובהחלט (בוחרים את α שרירותית, ולכן הראינו התכנסות במידה שווה ובהחלט בכל רדיוס שנרצה). נראה כעת שההגדרה מקיימת את תכונות האקספוננט.

למה 1.6

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$$

הוכחה: נתייחס אל s כקבוע, ואל t כמשתנה בלתי תלוי. נתבונן במשוואה

$$\begin{aligned}\Psi' &= A\Psi \\ \Psi(0) &= e^{sA}\end{aligned}$$

שני האגפים של השוויון בלמה הם פתרונות של המשוואה, ולכן הם מזדהים. לראיה:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}e^{sA}) = Ae^{tA}e^{sA} = Ae^{tA}e^{sA}$$

■

מכאן נקבל גם, עבור $s = -t$:

$$e^{tA}e^{-tA} = e^{0A} = I$$

ולכן

$$e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$$

1.1 משוואות לא הומוגניות

כעת המשוואה היא

$$x' = Ax + g$$

עבור ווקטור $g(t)$. נרצה לחשב פתרון בעזרת e^{tA} . אנחנו יודעים שהפתרון של המשוואה ההומוגנית הוא $x_H = e^{tA} \cdot c$. עבור ווקטור c . לכן נשתמש בווריאצית הפרמטרים ונחפש פתרון מהצורה

$$x_p = e^{tA}c(t)$$