

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

16 במרץ 2017

1 משפט קיום ויחידות עבור משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון

הבעיה היא

$$\begin{aligned}y' + p(x)y &= g(x) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

האם תמיד קיים פתרון? האם קיים יותר מפתרון אחד? האם הפתרון תקף לכל x , או רק בקטע סביב x_0 ?

משפט 1.1 אם הפונקציות $p(x)$, $g(x)$ רציפות בקטע $\alpha < x < \beta$ המכיל את x_0 , אזי לכל y_0 קיים פתרון יחיד $y(x)$ המקיים את המשוואה בקטע.

הוכחה: ראשית, עבור קיום פתרון, הוכחנו בשיעור שעבר - חישבנו פתרון אפשרי אחד. כל עוד $p(x)$, $g(x)$ רציפות, הפתרון שמצאנו מוגדר היטב וגזיר. נותר לבדוק את יחידות הפתרון.

דרך ראשונה: נובעת מהחישוב שעשינו. התחלנו עם $y' + py = g$, וכפלנו בגורם אינטגרציה $h(x)$, עד שקיבלנו פתרון מסוים. העניין הוא שאפשר ללכת בכיוון השני - ולכן כל המעברים הם של "אם ורק אם". לכן לא ייתכן עוד פתרון. דרך שנייה: דרך זו לא תלויה בידיעת הפתרון. נניח שקיימים שני פתרונות שונים, $y_1(x)$, $y_2(x)$ נגדיר

$$u(x) = y_1 - y_2$$

אזי, אם נציב את u במשוואה שהתחלנו איתה,

$$\begin{aligned}u' + p(x)u &= 0 \\ u(x_0) &= 0\end{aligned}$$

נרצה להראות שמכאן נובע כי $u = 0$. נכפיל בגורם האינטגרציה $e^{\int^x p}$:

$$\frac{d}{dx} \left(u e^{\int^x p} \right) = 0$$

$$u e^{\int^x p} = c$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$c \equiv 0$$

גורם האינטגרציה אינו 0 בשום מקום, ולכן כדי שיתקיים

$$u e^{\int^x p} = 0$$

חייב להתקיים $u \equiv 0$, כלומר $y_1 \equiv y_2$ והוכחנו את היחידות. ■

נשים לב שבמקרה של משוואה דיפרנציאלית רגילה לינארית, ייתכן שהפתרון לא יהיה קיים לכל x , אם p, g לא רציפות בנקודות כלשהן. במקרה זה ניתן לזהות ישירות מהמשוואה את הנקודות בהן הפתרון עלול להישבר.

דוגמא

$$y' = \frac{1}{x^2}$$

$$y(1) = 1$$

נפתור

$$y = -\frac{1}{x} + c$$

ונקבל על ידי הצבת תנאי ההתחלה כי

$$y = -\frac{1}{x} + 2$$

הפתרון לא עובד בנקודה $x = 0$ - שזה בדיוק היכן שהפונקציה g לא רציפה.

2 שיטות לפתרון משוואה דיפרנציאלית רגילה לא לינארית מסדר ראשון

2.1 הפרדת משתנים

הגדרה 2.1 משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון תקרא מופרדת אם היא מהצורה

$$y'(x) = a(x) b(y)$$

ולא מופרדת אחרת.

נכתוב משוואה דיפרנציאלית רגילה בצורה

$$y' = -\frac{M(x)}{N(y)}$$

$$M(x) + N(y) y' = 0$$

$$\int^x M(s) ds + \int^x N(y(x)) y'(x) dx = c$$

$$\int^x M(s) ds + \int_{y_0}^{y(x)} N(\tilde{y}) d\tilde{y} = c$$

נניח כי נתון בנוסף

$$y(x_0) = y_0$$

אזי

$$\int_{x_0}^x M(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_{y_0}^y N(\tilde{y}) d\tilde{y} = c$$

בכל העבודה הזו, לקחנו $N(y) = \frac{1}{b(y)}$ - זה אפשרי רק כאשר $b(y) \neq 0$.
אם קיים α עבורו $b(\alpha) = 0$, נקבל כי

$$y'(\alpha) = 0$$

ולכן במקרה הזה נקבל כי $y(x) \equiv \alpha$ פתרון סטציונרי. לעתים פתרון זה נקרא סינגולרי.
הרבה פעמים כותבים ופותרים כך:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x)}{N(y)}$$

$$M(x) dx + N(y) dy = 0$$

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy$$

הצורה שרשמנו כאן סימטרית עבור x, y , ולכן ניתן גם לכתוב

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(y)}{M(x)} = \frac{1}{a(x)b(y)}$$

לפעמים נוח יותר לפתור כך. בנוסף, אם קיים $x = \beta$ עבורו $\frac{1}{M(\beta)} = \frac{1}{a(\beta)} = 0$ אזי $x \equiv \beta$ גם פתרון סטציונרי.

דוגמא

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ ydy + xdx &= 0 \\ \int y \, dy + \int x \, dx &= c \\ \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} &= c \\ x^2 + y^2 &= \tilde{c}\end{aligned}$$

האם קיימים פתרונות סטציונריים? לא, כי אגף ימין לא מתאפס עבור אף ערך y .