

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

21 במאי 2017

1 פתרון משוואות בעזרת טורים

דוגמא ננסה לפתור את $y'' + y = 0$ בעזרת טורים. נחפש פתרון מהצורה

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

נניח שיש לטור זה רדיוס התכנסות $\rho > 0$. כלומר הטור מתכנס עבור $|x| < \rho$, ומתבדר עבור $|x| = \rho$. עבור טור חזקות מותר להחליף גזירה וסכום ולכן

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

כעת המשוואה היא

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + a_{n+2} (n+2)(n+1)) x^{n+2} = 0$$

נצטרך שכל המקדמים יתאפסו. נקבל

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

קיבלנו שתי דרגות חופש: a_0, a_1 . כמובן שהקשר מוגדר היטב כי לא מחלקים באפס (אסור). נשים לב שכלל הרקורסיה יכול להיות מוצג גם בתור

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(2k)!}$$
$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{a_1}{(2k+1)!}$$

כעת:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= a_0 \cos x + a_1 \sin x \end{aligned}$$

כמו שהיינו מצפים.

נשים לב שמותקיים

$$a_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!}$$

נשים לב שלמשל עבור $\sin x$, ממבחן המנה הטור מתכנס בכל $\mathbb{R}$.

דוגמא משוואת איירי:

$$y''(x) = xy$$

כאן $p(x) \equiv 1$, ולכן כל נקודה x_0 רגולרית. נחפש פתרון סביב 0. נסמן

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{aligned}$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} &= x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \\ 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1}) x^n &= 0 \end{aligned}$$

כלומר נסיק כי $a_2 = 0$, וכן

$$a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)}$$

קיבלנו שתי דרגות חופש - a_0, a_1 (כי $a_2 = 0$ בהכרח). נקבל נוסחאות סגורות:

$$\begin{aligned} a_{3k} &= \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3k-1) 3k} \\ a_{3k+1} &= \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 3k(3k+1)} \\ a_{3k+2} &= 0 \end{aligned}$$

אם כן, נקבל

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+1} x^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+2} x^{3k+2} = \\ &= a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k}}{a_0} x^{3k} \right) + a_1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k+1}}{a_1} x^{3k+1} \right) \end{aligned}$$

נבדוק רדיוס התכנסות על ידי מבחן המנה ונקבל $\rho = \infty$. הוורסונקיאן ירה לנו שאלה פתרונות בלתי תלויים, ולכן סיימנו לפתור.