

משוואות דיפרנציאליות רגילות

© ארזים

17 במאי 2017

1 שיטות למציאת פיתרון פרטי של משוואה לינארית לא הומוגנית

משוואת ריקטי היא

$$y'(x) = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2$$

זו משוואה מסדר ראשון שאינה לינארית. נשתמש בהצבת אוילר:

$$y(x) = -\frac{v'(x)}{q_2 v(x)}$$

ומקבלים אז

$$v''(x) - v'(x) \left(\frac{q_2'}{q_2} + q_1 \right) + q_0 q_2 v = 0$$

זו משוואה לינארית מסדר 2, וברוב המקרים המקדמים שלה לא קבועים.

1.1 שיטת וריאציית הפרמטרים

המשוואה שפותרים היא

$$y'' + py' + qy = g$$

כאשר ידועים 2 פתרונות בלתי תלויים u_1, u_2 של המשוואה ההומוגנית המתאימה. בניגוד לשיטת המקדמים הלא ידועים, שיטה זו עובדת גם כאשר p, q פונקציות של x .

תזכורת פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית הוא

$$y = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

כאשר c_1, c_2 קבועים.

בשיטת וריאציית הפרמטרים נחפש פתרון פרטי מהצורה

$$y(x) = c_1(x) u_1(x) + c_2(x) u_2(x)$$

כלומר אנחנו נותנים גם למקדמים להיות פונקציות של x . תמיד קיימים c_1, c_2 כאלה, למשל

$$c_1(x) = \frac{y_p(x)}{u_1(x)}, c_2(x) = 0$$

יש לנו 2 דרגות חופש, ורק אילוץ אחד - לפתור את המשוואה. לכן יש לנו בעצם דרגת חופש אחת. אותה ננצל כדי להכניס אילוץ שיפשט את החישובים. ראשית נגזור:

$$y_p' = c_1' u_1 + c_2' u_2 + c_1 u_1' + c_2 u_2'$$

את דרגת החופש שלנו ננצל כדי לדרוש $c_1' u_1 + c_2' u_2 = 0$ נגזור שוב:

$$y_p'' = c_1' u_1' + c_2' u_2' + c_1 u_1'' + c_2 u_2''$$

נציב את אלה במשוואה שלנו.

$$\begin{aligned} y_p'' + p y_p' + q y_p &= (c_1' u_1' + c_2' u_2' + c_1 u_1'' + c_2 u_2'') + p(c_1 u_1' + c_2 u_2') + q(c_1 u_1 + c_2 u_2) = g \\ &= c_1(u_1'' + p u_1' + q u_1) + c_2(u_2'' + p u_2' + q u_2) + c_1' u_1' + c_2' u_2' = g \end{aligned}$$

לכן c_1, c_2 מקיימים

$$\begin{aligned} c_1' u_1 + c_2' u_2 &= 0 \\ c_1' u_1' + c_2' u_2' &= g \end{aligned}$$

קיבלנו מערכת משוואות לינארית:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

כלומר מכלל קרמר:

$$\begin{aligned} c_1' &= \frac{-u_2 g}{W(u_1, u_2)} \\ c_2' &= \frac{u_1 g}{W(u_1, u_2)} \end{aligned}$$

לכן קיבלנו:

משפט 1.1 יהיו p, q, g פונקציות רציפות בקטע, ויהי $\{u_1, u_2\}$ פתרונות בלתי תלויים של המערכת ההומוגנית. אזי פתרון פרטי של המערכת נתון על ידי

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -u_1(x) \int \frac{u_2(t) g(t)}{W(u_1, u_2)(t)} dt + u_2(x) \int \frac{u_1(t) g(t)}{W(u_1, u_2)(t)} dt = \\ &= \int \frac{u_2(x) u_1(t) - u_1(x) u_2(t)}{W(u_1, u_2)(t)} g(t) dt \end{aligned}$$

דוגמא נפתור את

$$y'' + y = f$$

עבור f כללית. 2 הפתרונות הבלתי תלויים הם $u_1 = \cos x, u_2 = \sin x$. הוורונסקיאן הוא

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

נקבל

$$c_1(x) = - \int_x^x f(t) \sin t \, dt$$

$$c_2(x) = \int_x^x f(t) \cos t \, dt$$

ואז

$$y_p(x) = \int_x^x f(t) (\sin x \cos t - \sin t \cos x) \, dt = \int_x^x f(t) \sin(x-t) \, dt$$

פתרון פרטי זה הוא מהצורה

$$y_p(x) = \int_x^x G(x, t) f(t) \, dt$$

זה נכון גם עבור המקרה הכללי של המשוואה - קיבלנו עבור

$$y'' + py' + qy = g$$

כי ראינו שהפתרון הפרטי הוא

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_x^x \frac{u_2(x)u_1(t) - u_1(x)u_2(t)}{W(u_1, u_2)(t)} g(t) \, dt = \\ &= \int_x^x G(x, t) \cdot g(t) \, dt \end{aligned}$$

טרמינולוגיה: $f(x)$ נקראת אילוץ, $G(x, t)$ נקראת פונקציית גרין, והפתרון

$$y_p(x) = \int_x^x G(x, t) f(t) \, dt$$

הוא תגובה לאילוץ.

למה 1.2 יהי

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt$$

אזי

$$y_p(x_0) = 0 = y'_p(x_0)$$

הוכחה: ברור כי $y_p(x_0) = 0$, כי זה אינטגרל על פונקציות רציפות. כעת,

$$y'_p(x) = G(x, x) f(x) + \int_{x_0}^x G_x(x, t) f(t) dt$$

"אף אחד לא הרשה להחליף גזירה ואינטגרציה" - אחד הסטודנטים.
 "זה כי לימדו אתכם מתמטיקאים שימושיים, אני מרשה הכל! נורא ואיוס..." - המרצה.

עכשיו מההגדרה

$$G(x, t) = \frac{u_2(x) u_1(t) - u_1(x) u_2(t)}{W(u_1, u_2)(t)}$$

נקבל $G(x, x) = 0$ כלומר

$$y'_p(x) = \int_{x_0}^x G_x(x, t) f(t) dt$$

וזה אינטגרל על פונקציה רציפה. לכן $y'_p(x_0) = 0$.

מסקנה 1.3 כדי לפתור את בעיית תנאי ההתחלה הלא הומוגנית

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= g \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \end{aligned}$$

פותרים את הבעיה ההומוגנית ומוצאים שני פתרונות בלתי תלויים, ומחשבים את פונקציית גרין $G(x, t)$. מוצאים את הפתרון הפרטי של המשוואה בעזרת פונקציית גרין y_p . מחשבים את התגובה לאילוץ:

$$u_i(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

כאשר c_1, c_2 נקבעים לפי תנאי ההתחלה, כך שנקבל u_i שהוא פתרון של המערכת ההומוגנית עם אותם תנאי התחלה. הפתרון של הבעיה כולה הוא

$$y = y_p(x) + u_i(x)$$

דוגמא פתור את $y'' + y = f$, כאשר $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

פתרון הפתרון הפרטי הוא

$$y_p(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt$$

זה הפתרון של הבעיה עם תנאי התחלה הומוגניים. הפתרון

$$u_i(x) = \cos x$$

מקיים את תנאי ההתחלה וגם פותר את המשוואה ההומוגנית. כן הפתרון הוא

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt + \cos x$$

נסמן

$$L = D^2 + pD + q$$

מנסים לפתור את

$$Ly = f$$

נשים לב שמתקיים

$$L[G(x, t)] = 0$$

כעת נגדיר עוד אופרטור:

$$T_G(f) := \int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt$$

ואז נקבל כי

$$f \xrightarrow{T_G} y_p \xrightarrow{L} f$$

ולכן $T_G = L^{-1}$. נחשב ישירות:

$$Ly_p = L \left[\int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt \right]$$

נגזור

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt &= \int_{x_0}^x G_x(x, t) f(t) dt + \overbrace{G(x, x) f(x)}^0 = \\ &= \int_{x_0}^x G_x(x, t) f(t) dt \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt &= \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x G_x(x, t) f(t) dt = \\ &= \int_{x_0}^x G_{x,x}(x, t) f(t) dt + G_x(x, x) f(x) \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} Ly_p &= L \left[\int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt \right] = \int_{x_0}^x f(t) \underbrace{L[G(x, t)]}_0 dt + G_x(x, x) f(x) = \\ &= f(x) \end{aligned}$$

וזאת בגלל שמתקיים

$$\begin{aligned} G_x(x, t) &= \frac{u_1(t) u_2'(x) - u_2(t) u_1'(x)}{u_1(t) u_2'(t) - u_1'(t) u_2(t)} \\ G_x(x, x) &= 1 \end{aligned}$$

ראינו כבר כי עבור $y'' + y = f(x)$ מתקיים $G(x, t) = \sin(x - t)$

■

למה 1.4 $G(x, t) = -G(x, t)$ אם ורק אם $p = 0$.

ההוכחה תהיה בתרגיל הבית.

למה 1.5 אם המקדמים במשוואה ההומוגנית הם קבועים, אזי מתקיים

$$G(x, t) = g(x - t)$$

עבור g כלשהי.

הוכחה: ראשית, נרצה להראות שמספיק לנו להוכיח שלכל $y, G(x + t, t)$ בלתי תלוי במשתנה t . מדוע זה מספיק? כי אם $G(x + t, t) = g(x)$ לכל x, t , אזי נציב $\tilde{x} = x + t$ ונקבל שלכל $\tilde{x}, t$ מתקיים

$$G(\tilde{x}, t) = g(\tilde{x} - t)$$

נוכיח את מה שמספיק. נזכור כי

$$G(x+t) = \frac{u_1(t)u_2(x+t) - u_2(t)u_1(x+t)}{W(u_1, u_2)(t)}$$

פונקציה זו מקיימת

$$L[G(x+t, t)] = 0$$

כמובן, $L[u_i(x)] = 0$, ולכן גם לכל c מתקיים $L[u_i(x+c)] = 0$, ובפרט $L[u_i(x+t)] = 0$. ראינו כי

$$G(x+t, t)|_{x=0} = G(t, t) = 0$$

כעת, אם נגזור בנקודה לפי x כאשר $x = 0$ נקבל

$$\frac{d}{dx}G(x+t, t)|_{x=0} = \frac{u_1(t)u'_2(x+t) - u_2(t)u'_1(x+t)}{W(u_1, u_2)(t)}|_{x=0} = 0$$

קיבלנו כי $G(x+t, t)$ פותרת את המערכת ההומוגנית $Ly = 0$ עם תנאי ההתחלה $y(0) = 0, y'(0) = 1$. אבל פיתרון כזה הוא יחיד, ולכן לא ייתכן שהפונקציה תלוייה במשתנה t . לכן סיימנו. ■

2 פתרון משוואות מסדר שני הומוגניות בעזרת טורים

נתבונן במשוואה

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

הגדרה 2.1 אם $p(x_0) \neq 0$ הנקודה נקראת רגולרית. אם $p(x_0) = 0$ הנקודה נקראת סינגולרית.

ראשית, נפתור על ידי טורים סביב נקודה רגולרית.

רעיון נחפש פתרון בצורה של טור חזקות סביב הנקודה הרגולרית x_0 :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

דוגמא ניקח $y'' + y = 0$, כאן, $p(x) = 1$, ואין נקודות סינגולריות. נחפש פתרון כטור חזקות סביב $x_0 = 0$.