

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

11 במאי 2017

אנחנו חוקרים את משוואת התנועה של מאסה שמחוברת לקפיץ עם חיכוך:

$$mu'' + cu' + ku = 0$$

אם החיכוך גדול, כלומר $c^2 > 4mk$, נקבל שני פתרונות ממשיים ושליילים של הפולינום האופייני:

$$mr^2 + cr + k = 0$$
$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

בכל מקרה, הפתרון ידעך לאפס (נקודת שוויו המשקל). הפתרון הוא

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

אך החיכוך קטן, משמע $c^2 < 4mk$ נקבל פתרון מחזורי

$$u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} (A \cos(\mu t) + B \sin(\mu t))$$

כאשר $\mu = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$. אלה תנודות מחזוריות, חיוביות ושליליות, שדועכות לאפס. נוסף כעת לבעיה כוח אילוף חיצוני שפועל על המסה:

$$mu'' = -ku - cu' + F_{ext}$$

נניח כי $F_{ext} = F_0 \cos(\omega t)$, ונקבל

$$mu'' + cu' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

מקרה ראשון - אין חיכוך:

$$mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

נמצא קודם פתרון פרטי. נצטרך לבדוק האם ω שורש של הפולינום האופייני $mr^2 + k$.
השורשים הם

$$r = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

אם $\omega \neq \omega_0$ נפעיל שיטת מקדמים לא ידועים. נקבל

$$y_p = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

החלק של $\sin$ יתבטל כי באגף ימין לא כתוב $\sin$. נציב:

$$\begin{aligned} -ma\omega^2 + ka &= F_0 \\ a &= \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$u(t) = c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

הפתרון הזה מכיל שתי תדירויות - ω_0 , התדר הפנימי של המערכת, וגם ω , התדר של האילוף.

מקרה מעניין ראשון - $\omega \neq \omega_0$ אבל $\omega \approx \omega_0$. נניח שהמסה במנוחה, כלומר $u(0) = 0$, ולכן $u'(0) = 0$

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

לכן

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)) = \frac{2F_0 \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

אם $\omega \approx \omega_0$, אז $\omega - \omega_0 \ll \omega + \omega_0$. אזי הסינוס השמאלי משתנה הרבה יותר מהר מאשר הימני.

מקרה מעניין שני - $\omega = \omega_0$.

$$y_p(t) = t(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))$$

$\omega = \omega_0$ שורש של המשוואה האופיינית מריבוי 1. נציב

$$y_p'' + \omega_0^2 y_p = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t)$$

נקבל

$$-2A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + 2B\omega_0 \cos(\omega_0 t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t)$$

מתקבל $A = 0$, $B = \frac{F_0}{2m\omega_0}$. כלומר

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

נקבל

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

החלק הימני הוא התגובה לאילוץ, בעוד החלק השמאלי נקבע לפני תנאי ההתחלה. נשים לב שקיבלנו u שאינו חסום כאשר $t \rightarrow \infty$.
מה קורה אם נוסיף כעת חיתוך? $\omega_0 = \omega + f$, f החיכוך. בודקים (תרגיל בית) ומקבלים

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0 \cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + c^2 \omega^2}}$$

נקבל שאחרי מספיק זמן, השפעת תנאי ההתחלה נעלמת, כי $\operatorname{Re}(r_1), \operatorname{Re}(r_2) < 0$.
כעת, אפילו אם $\omega = \omega_0$, הפתרון נשאר חסום.