

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

4 במאי 2017

1 משוואות לינאריות מסדר 2 עם מקדמים קבועים

נתבונן במשוואה

$$Lu = au'' + bu' + cu = 0$$

כאשר a, b, c קבועים. משפט קיום ויחידות מבטיח שכל פתרון קיים גלובלית, כלומר עבור כל $x \in \mathbb{R}$. נחפש פתרון מהצורה $u = e^{rx}$. מתקיים

$$L(e^{rx}) = e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

$e^{rx} \neq 0$, ולכן יש לפתור את $l(r) = ar^2 + br + c = 0$. זה נקרא הפולינום האופייני של המשוואה, או של L . כמובן, $l(r) = 0$ אם ורק אם $u = e^{rx}$ פתרון של המשוואה. אנחנו יודעים את נוסחת השורשים:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

נפריד למקרים:

1. $b^2 - 4ac > 0$: יש שני שורשים ממשיים (פשוטים - מריבוי 1) ושונים זה מזה. אזי יש לנו שני פתרונות, $\{e^{r_1x}, e^{r_2x}\}$, ובבירור הם בלתי תלויים (למשל, הם לא פרופורציונליים, או שהוורונסקיאן שלהם לא מתאפס). לכן, הפתרון הכללי הוא

$$u = c_1 e^{r_1x} + c_2 e^{r_2x}$$

דוגמא

$$\begin{aligned} u'' - 5u' + 6u &= 0 \\ l(r) = r^2 - 5r + 6 &= 0 \\ r_{1,2} &= 2, 3 \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$u = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

2. $b^2 - 4ac = 0$: יש שורש ממשי יחיד (כפול - מריבוי 2). פתרון זה הוא $r_1 = -\frac{b}{2a}$. אז פתרון אחד הוא $u_1 = e^{r_1 x}$. ניתן למצוא פתרון נוסף על ידי הורדת סדר. יש דרך אחרת למצוא פתרון שני: ראינו

$$L[e^{rx}] = e^{rx} l(r) = e^{rx} a(r - r_1)^2$$

נגזור את שני האגפים לפי r :

$$L[xe^{rx}] = axe^{rx}(r - r_1)^2 + 2ae^{rx}(r - r_1) = ae^{rx}(r - r_1)(x(r - r_1) + 2)$$

נציב $r = r_1$ ונקבל

$$L[xe^{r_1 x}] = 0$$

לכן הפתרון השני הוא $u_2 = xe^{r_1 x}$ והוא בלתי תלוי באותו u_1 שמצאנו קודם. לכן זו מערכת יסודית.

3. $b^2 - 4ac < 0$: שני הפתרונות הם מרוכבים וצמודים זה לזה. נסמן

$$r_1 = \lambda + i\mu$$

$$r_2 = \lambda - i\mu$$

כאשר λ, μ ממשיים. אזי נקבל

$$u_1 = e^{r_1 x} = e^{(\lambda + i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} = e^{\lambda x} (\cos(\mu x) + i \sin(\mu x))$$

$$u_2 = e^{r_2 x} = e^{(\lambda - i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{-i\mu x} = e^{\lambda x} (\cos(\mu x) - i \sin(\mu x))$$

כעת, u_1, u_2 בסיס, ולכן גם $\frac{u_1 - u_2}{2i}, \frac{u_1 + u_2}{2}$ בסיס. נקבל את הבסיס הבא:

$$e^{\lambda x} \cos(\mu x), e^{\lambda x} \sin(\mu x)$$

קיבלנו בסיס ממשי של הפתרונות.

דוגמא נפתור את

$$u'' + 9u = 0$$

$$l(r) = r^2 + 9$$

$$r_{1,2} = \pm 3i$$

$$\lambda = 0, \mu = 3$$

$$u(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

נשים לב שמתקיים

$$e^{\lambda x} \cos(\mu x) = \operatorname{Re} \left(e^{(\lambda+i\mu)x} \right)$$

$$e^{\lambda x} \sin(\mu x) = \operatorname{Im} \left(e^{(\lambda+i\mu)x} \right)$$

זה לא מקרה.

משפט 1.1 אם במשוואה הלינארית

$$L[y] = y'' + py' + qy = 0$$

הפונקציות p, q הן ממשייות, ואם

$$\phi(x) = u(x) + iv(x)$$

הוא פתרון מרוכב של המשוואה, כאשר u, v ממשייות, אזי u, v הן פתרונות של המשוואה.

הוכחה:

$$0 = L[\phi] = L[u + iv] = L[u] + iL[v]$$

$$L[u] = L[v] = 0 \text{ לכן נקבל } L[u] = L[v] = 0$$

■

1.1 משוואת אוילר הומוגנית

נתבונן במשוואה

$$\alpha x^2 y''(x) + \beta x y'(x) + \gamma y(x) = 0$$

כאשר $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. נחלק את המשוואה בגורם x^2 :

$$\alpha y'' + \frac{\beta}{x} y' + \frac{\gamma}{x^2} y = 0$$

נסמן $q = \frac{\gamma}{x^2}, p = \frac{\beta}{x}$. אלה אינן רציפות בנקודה 0, ולכן ייתכן שהפתרון יישבר שם. נניח כי $\tilde{y}(x)$ הוא פתרון עבור $x > 0$. כדי לפתור עבור $x < 0$ נגדיר $s = -x$, ואז $s > 0$, והמשוואה עבור $y(s)$ היא

$$\alpha s^2 y_{ss} + \beta s y_s + \gamma y = 0$$

זו בדיוק אותה משוואה כמו קודם. לכן עבור $x < 0$, $y(x) = \tilde{y}(-x) = \tilde{y}(|x|)$, כאשר מציבים $|x|$. לכן פתרון. כלומר, הפתרון שקיבלנו עבור $x > 0$ תקף גם עבור $x < 0$, כלומר $y(x) = \tilde{y}(|x|)$. מספיק לפתור עבור $x > 0$. בתחום זה נבצע את ההצבה $x = e^t$. כלומר:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx} = e^t \frac{d}{dx} = x \frac{d}{dx} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \left(x \frac{d}{dx} \right)^2 = x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) = \\ &= x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx}\end{aligned}$$

לכן,

$$\begin{aligned}xy' &= y_t \\ x^2y'' &= y_{tt} - y_t\end{aligned}$$