

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

© ארזים

27 באפריל 2017

ראינו שכל משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר n שקולה למערכת של n משוואות מסדר ראשון. לכן, למשל, כדי להוכיח משפט קיום ויחידות עבור משוואה מסדר n , אפשר להוכיח את המשפט על מערכת של n משוואות מסדר ראשון. באותו אופן, כדי לפתור נומרית משוואה מסדר n , מספיק שנדע לפתור נומרית מערכות של n משוואות מסדר ראשון. נתונה המערכת $y'_i(x) = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ עם תנאי התחלה $y_i(x_0) = y_0^i$. נעבור למערכת האינטגרלית השקולה:

$$y_i(x) = y_0^i + \int_{x_0}^x f_i(t, y_1, \dots, y_n) dt$$

נבצע איטרציות פיקרד:

$$y_i^{(k+1)}(x) = y_0^i + \int_{x_0}^x f_i(t, y_1^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}) dt$$

נח לעבוד בסימונים ווקטוריים:

$$\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$$

$$\underline{y}_0 = (y_0^1, \dots, y_0^n)$$

ואז איטרציות פיקרד הן

$$\underline{y}^{(k+1)}(x) = \underline{y}_0 + \int_{x_0}^x \underline{f}(t, \underline{y}^{(k)}) dt$$

תנאי ליפשיץ - נגיד שפונקציה סקלרית $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ מקיימת תנאי ליפשיץ לפי $y_1, \dots, y_n$ בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ אם עבור כל שתי נקודות בתוך D בעלות אותו ערך x ,

$$(x, y_1, \dots, y_n), (x, y'_1, \dots, y'_n)$$

מתקיים

$$|f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, y'_1, \dots, y'_n)| \leq \sum L_i |y_i - y'_i|$$

כאשר L_i קבועים.

משפט קיום ויחידות לוקלי למערכת מסדר ראשון:
נתונה המערכת

$$\begin{aligned} y'_i(x) &= f_i(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_i(x_0) &= y_0^{(i)} \end{aligned}$$

תהי $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ התחום הסגור המוגדרת על ידי $|x - x_0| \leq a, |y_i - y_0^{(i)}| \leq b$. נניח כי f_i כולן רציפות בתוך D ומקיימות שם תנאי ליפשיץ לפי $y_1, \dots, y_n$. נסמן בתור M את החסם המשותף של $|f_i|$ על D . יהי $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. אזי קיים פתרון אחד ויחיד של המערכת בקטע $|x - x_0| \leq \alpha$.

ההוכחה זהה למקרה הסקלרי. מה לגבי קיום ויחידות עבור משוואה מסדר n ? אם יש לנו המערכת $y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ נפתור על ידי הפיכה למערכת משוואות לינאריות - משמע בשביל קיום ויחידות צריך רציפות של f וכן ליפשיציות שלה לפי $y_1, \dots, y_n$.

דוגמא ניקח $y'' = -yy'^3 - 2x^2y^2$ אזי

$$f(x, y, y') = -yy'^3 - 2x^2y^2$$

כאן מסתכלים על x, y, y' כעל בלתי תלויים. f כמובן רציפה. היא צריכה להיות ליפשיץ במשתנים y, y' , זה מתקיים, כי הנגזרות לפי המשתנים הללו חסומות בתחום (כי הן רציפות). לכן יש ליפשיץ.

משפט 0.1 (משפט קיום ויחידות עבור משוואה מסדר n) נתונה המשוואה $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ עם n תנאי התחלה. יהי $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ התחום המוגדר על ידי $|x - x_0| \leq a, |y_i - y_0^{(i)}| \leq b$. נניח כי f רציפה בתוך D , $|f| \leq M$ על D , והיא מקיימת שם תנאי ליפשיץ לפי $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ אזי קיים פתרון אחד ויחיד של המערכת בקטע $|x - x_0| \leq \alpha$ כאשר

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M + b + \sum |y_0^{(j)}|} \right\}$$

ההוכחה נובעת מהמקרה של n משוואות מסדר ראשון.
באופן דומה נובע גם משפט קיום ויחידות גלובלי בשכבה אינסופית.
נתבונן במערכת של n משוואות לינאריות מסדר ראשון:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

ניתן לרשום באופן קומפקטי יותר

$$\frac{dy_i}{dx} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_j \right) + b_i(x)$$

אם המקדמים $a_{ij}(x), b_i(x)$ רציפים בקטע $[a, b]$, אזי לכל $x_0 \in [a, b]$ תנאי התחלה קיים פתרון יחיד בקטע $a \leq x \leq b$. שוב ההוכחה דומה מאוד למקרה של משוואה יחידה.

נתבונן כעת במקרה של משוואה מסדר 2. $y'' = f(x, y, y')$ היא המערכת. המקרה הכי פשוט הוא אם $y''(x) = g(x)$, אזי פשוט עושים אינטגרל ומקבלים שני קבועים שרירותיים. איך הם נקבעים - בשיעור הבא.