

סיבוכיות

© ארזים

23 במאי 2017

הגדרה 0.1 (המחלקה RL) נאמר כי $A \in \text{RL}$ אם קיימת מכונת טיורינג עם:

1. סרט קלט לקריאה בלבד.
 2. סרט עבודה בגודל $O(\log n)$.
 3. סרט אקראיות לקריאה בלבד, שבו הראש זז רק ימינה.
 4. ריצה פולינומית.
- כך שאם $x \in A$ אזי

$$\mathbb{P}_r(M(x, r) = 1) \geq \frac{1}{2}$$

כאשר r האקראיות, ואם $x \notin A$ אזי

$$\mathbb{P}_r(M(x, r) = 1) = 0$$

מתקיים

$$L \subseteq \text{RL} \subseteq \text{NL} \subseteq L^2 \cap P$$

ואפילו יודעים כי $\text{RL} \subseteq L^{\frac{3}{2}}$. מאמינים שמתקיים $\text{RL} = L$.

משפט 0.2 תהי USTCON שפת כל השלשות (G, s, t) כאשר G גרף לא מכוון שבו יש מסלול בין הקודקודים s, t . אזי $\text{USTCON} \in \text{RL}$ (והאמת שאפילו $\text{USTCON} \in L$ אבל את זה לא נראה).

הוכחה: נבצע הילוך מקרי בגרף, שמתחיל בקודקוד s , באורך n^5 . אם הגענו אל t , נעצור ונקבל. אחרת, אחרי n^5 צעדים, עצור ודחה. ברור שאם אין מסלול בין s, t הסתברות הקבלה היא 0, ושהזיכרון דורש רק את הקודקוד הנוכחי ומונה על n^5 , כלומר $O(\log n)$. נרצה עוד להוכיח שאם יש מסלול בין s, t , אז נראה את t בהסתברות טובה (נוכיח שלפחות $\frac{1}{2n}$, ואפשר להגביר עד חצי על ידי חזרה n^2 פעמים). הטענה הזו לא נכונה אם G גרף מכוון - יש דוגמאות נגדיות פשוטות.

בלי הגבלת הכלליות, G הוא גרף d רגולרי (נוסיף לולאות עצמיות אם צריך). נסמן A את מטריצת השכנויות המנורמלת של G , כלומר

$$A_{u,v} = \frac{n_{u,v}}{d}$$

כאשר $n_{u,v}$ היא כמות הקשתות בין u, v .

טענה 0.3 יהי p_0 ווקטור התפלגות על הקודקודים. אזי $A^i p_0 = p_i$ הוא ווקטור התפלגות על הקודקודים שמייצג בחירת קודקוד מסויים לפי p , וביצוע הילוך מקרי בגרף באורך i .

הוכחה: באינדוקציה על i . עבור $i = 0$ זה ברור. עבור $i > 0$:

$$\begin{aligned} A^i p_0 &= A p_{i-1} \\ A^i p_0(v) &= A p_{i-1}(v) = \sum_u A_{v,u} p_{i-1}(u) \end{aligned}$$

$A_{v,u}$ היא ההסתברות לעבור בין u, v , $p_{i-1}(u)$ מהנחת האינדוקציה היא ההסתברות שהגענו אל u אחרי $i-1$ צעדים. בעצם קיבלנו את נוסחת ההסתברות השלמה - ולכן זה יוצא ההסתברות שהגענו אל v אחרי i צעדים. ■

יהיה יותר קל לנתח מה קורה אם עושים הילוך מקרי עצל $B = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}A$. זה לא משנה את יחס הישיגות והטענה עדיין נכונה. יהי p_0 הווקטור שהוא 1 בקואורדינטה s ואפס בכל האחרות. אנחנו רוצים להבין איך נראה הווקטור $B^k p_0$, ובפרט אנחנו רוצים להראות

$$B^k p_0[t] \geq \frac{1}{2n}$$

עבור $k = n^5$. A סימטרית, ולכן יש לה n ערכים עצמיים ממשיים $-1 \leq \mu_n \leq \dots \leq \mu_1 = 1$. גם B סימטרית, עם ערכים עצמיים $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu_i$. בפרט $0 \leq \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 = 1$

לאלה יש ווקטורים עצמיים מתאימים $v_1, \dots, v_n$ אורתונורמליים, עם $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1)$.

טענה 0.4 $\|B^k p_0 - \frac{1}{n}(1, \dots, 1)\|_2^2 \leq \lambda_2^{2k}$. בתרגיל הבית אפילו נראה כי $\lambda_2 \leq 1 - \frac{1}{4n^4}$.

הוכחה: נכתוב

$$p_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

כאשר $\alpha_i = \langle p_0, v_i \rangle$ אזי $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$. כעת,

$$\begin{aligned} p_0 &= \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i = \frac{1}{n}(1, \dots, 1) + \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i \\ B^k p_0 &= \frac{1}{n}(1, \dots, 1) + \sum_{i=2}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i \end{aligned}$$

ולכן מתקיים

$$\begin{aligned} \left\| B^k p_0 - \frac{1}{n} (1, \dots, 1) \right\|_2^2 &= \left\| \sum_{i=2}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i \right\|_2^2 = \sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \lambda_i^{2k} \leq \\ &\leq \lambda_2^{2k} \sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \leq \lambda_2^{2k} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \lambda_2^{2k} \end{aligned}$$

■

0.5 מסקנה

$$\left\| B^k p_0 - \frac{1}{n} (1, \dots, 1) \right\|_2 \leq \left(1 - \frac{1}{4n^4} \right)^{n^5} \leq e^{-\frac{n^5}{4n^4}} = e^{-\frac{n}{4}}$$

ובפרט, אם לא מתקיים $B^k p_0[t] \leq \frac{1}{2n}$ אז מתקיים

$$\sum_{i=1}^n \left(B^k p_0(i) - \frac{1}{n} \right)^2 \geq \frac{1}{4n^2}$$

■

בסתירה.