

סיבוכיות

© ארזים

16 במאי 2017

הגדרה 0.1 תהי C מחלקת שפות. מגדירים

$$\text{co}C = \{\bar{A} \mid A \in C\}$$

משפט 0.2 $\text{NL} = \text{coNL}$.

"זיכרון אפשר למחזר... הזמן שחלף הוא אבוד" - המתרגל.

תרגיל נגדיר B את שפת הגרפים הלא מכוונים הדו צדדיים. הוכיחו כי $B \in \text{NL}$.

הוכחה: מספיק להראות $\bar{B} \in \text{NL}$. בשביל זה ניעזר בעובדה כי G לא דו צדדי אם ורק אם יש בו מעגל אי זוגי. נתאר מוודא בזכרון $O(\log n)$ עבור $\bar{B}$. המוודא יצפה לעד מהצורה $v_0, v_1, \dots, v_0$ ויוודא שזהו מעגל אי זוגי. צריך לזכור את v_0 , את זוג הקודקודים הנוכחי v_i, v_{i+1} שביניהם מוודאים קיום קשת, וביט שסופר את הזוגיות של המעגל. ■

עובדה 3-SAT היא NP שלמה.

תרגיל הראו כי 2-SAT היא NL שלמה. כמובן, זוהי שפת כל הנוסחאות בצורת 2CNF שהן ספיקות.

פתרון נתחיל מלהראות שהשפה NL נראת רדוקציה $2\text{SAT} \leq_L \overline{\text{STCON}}$. יהי (G, s, t) קלט של $\overline{\text{STCON}}$. נבנה פסוק φ_G שספיק אם ורק אם אין מסלול בין s, t בגרף G . נזכר כי

$$x_1 \vee x_2 \equiv \overline{x_1} \rightarrow x_2$$

"זה כבר מזכיר מסלולים בגרפים. קודם כל כי יש חץ" - המתרגל.

לכל קודקוד $u \in G$ נגדיר משתנה x_u . נגדיר את φ_G כך שיתקיימו התכונות הבאות, לכל α שמספקת את φ_G :

1. אם הקודקוד v ישיג מהקודקוד s , אזי $\alpha(x_v) = 1$.

2. אם הקודקוד t ישיג מהקודקוד u , אזי $\alpha(x_u) = 0$.

אם נצליח לבנות כך את φ_G , ברור שאם יש מסלול אז אין השמה מספקת. בבנייה שנראה, נראה גם שאם אין מסלול אז יש השמה מספקת. נגדיר

$$\varphi_G = x_s \wedge \overline{x_t} \bigwedge_{(u,v) \in E} (x_u \rightarrow x_v)$$

כמובן נמיר את הדברים מהצורה $x_u \rightarrow x_v$ להיות $\overline{x_u} \vee x_v$. ברור שבנייה זו דורשת זיכרון לוגריתמי. נראה φ_G ספיקה אם ורק אם אין מסלול בין s, t .

נניח שיש מסלול. נראה שהנוסחה לא ספיקה. נניח בשלילה שהיא ספיקה, ותהי α השמה מספקת. $\alpha(x_s) = 1$, ובאינדוקציה, לכל קודקוד v ששייך מהקודקוד s מתקיים $\alpha(x_v) = 1$. באותו אופן, $\alpha(x_t) = 0$, ובאינדוקציה לכל קודקוד u שממנו הקודקוד t שייך מתקיים $\alpha(x_u) = 0$. מצד שני, הנחנו כי הקודקוד t שייך מהקודקוד s , בסתירה.

בכיוון השני, נניח שאין מסלול מהקודקוד s אל הקודקוד t . נבנה השמה α שמספקת את φ_G . נגדיר $\alpha(x_v) = 1$ אם ורק אם הקודקוד v שייך מהקודקוד s . ברור כי $\alpha(x_s) = 1$, $\alpha(x_t) = 0$. נותר להראות כי לכל $(u, v) \in E$ $\alpha(u, v) \in E$ מספקת את $\alpha(x_u \rightarrow x_v)$. זה ברור - אם $\alpha(x_u) = 0$ זה מסתפק וסיימנו. אם $\alpha(x_u) = 1$, אזי הקודקוד u שייך מהקודקוד s , ומחובר בקשת אל v , ולכן גם הקודקוד v שייך מהקודקוד s , ועל כן $\alpha(x_v) = 1$, ולכן הפסוקית מסתפקת. אם כן, סיימנו. נותר לנו להראות כי $2SAT \in NL$. יותר קל, ושקול, להראות $2SAT \in NL$.

בהינתן נוסחת $2CNF$ כלשהי φ , נגדיר גרף מכוון G_φ באופן הבא:

$$V = \{x_1, \dots, x_n, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}\}$$

אם הפסוקית $\alpha \vee \beta$ נמצאת בנוסחה φ , נחבר את הצלעות $(\overline{\alpha}, \beta)$, $(\overline{\beta}, \alpha)$.

למה 0.3 φ לא ספיק אם ורק אם יש מעגל מכוון בגרף G_φ שמכיל משתנה ושילתו.

הוכחה: נניח שיש מעגל כזה. נראה שהנוסחה לא ספיקה. נניח בשלילה שיש השמה מספקת α . נסמן את המעגל $v_1 = x \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k = \overline{x} \rightarrow v_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_l = x$. את $v_l = x$ $\alpha(v_l) = 1$ $\alpha(x) = 1$, מהגדרת הגרף ובאינדוקציה נובע שלכל $i \geq 1$ מתקיים $\alpha(v_i) = 1$. אבל מתקיים $\alpha(v_k) = 0$, בסתירה. אם $\alpha(x) = 0$, $\alpha(v_k) = 1$, ולכן לכל $n \geq k$ מתקיים $\alpha(v_k) = 1$, אבל מתקיים $\alpha(v_l) = 0$, בסתירה.

בכיוון השני, נניח שלכל x אין מעגל שמכיל את $x, \overline{x}$. נגדיר השמה α שתספק את φ . נגדיר את T להיות אוסף כל אותם x שיש מסלול מהם אל $\overline{x}$. נגדיר את F להיות אוסף כל אותם y שיש מסלול מהקודקוד $\overline{y}$ אליהם. נגדיר $\alpha(x) = 1$ לכל $x \in T$, $\alpha(y) = 0$ לכל $y \in F$. מההנחה $F \cap T = \emptyset$ ולכן זה מוגדר היטב. לכל קודקוד ששייך מקודקוד כלשהו בתוך T צריך גם לתת את הערך 1, ולכל קודקוד שאפשר להשיג ממנו קודקוד כלשהו מתוך F צריך לתת את הערך 0. יש להראות שזה לא גורם לסתירות - לא נעשה את זה כאן (אין זמן). אם נשארו משתנים שלא קיבלנו ערך, אפשר לתת להם את הערך 1 ולפעפץ אותו הלאה בגרף. יש להראות שגם זה לא

מוביל לסתירות. כמובן יש גם להראות שזה מספק את φ . בשביל זה, הלמה הבאה שימושית (נשאיר הביתה כי אין זמן). ■

למה 0.4 אם יש מסלול מהקודקוד α אל הקודקוד β , אז יש מסלול מהקודקוד $\bar{\beta}$ אל $\bar{\alpha}$.

המוודא הלוגריתמי של $\overline{2SAT}$ יצפה לעד מהצורה $x, v_1, v_2, \dots, \bar{x}, u_1, \dots, u_l, x$ ויוודא שכל הצלעות קיימות, שהמעגל מסתיים היכן שהתחיל ($\bar{x}$) ועובד דרך $\bar{x}$. הזיכרון הוא לוגריתמי בבירור, והנכונות מהלמה. כדי לוודא קיום של צלע בגרף, יש לקרוא את הנוסחה ולפרש בהתאם להגדרה (לא זוכרים את הגרף).