סיבוכיות

ⓒ ארזים

9 במאי 2017

1 רדוקציות מחיפוש להכרעה

תרגיל נניח שקיים אלגוריתם דטרמינסטי פולינומי A שמכריע את SAT: בהינתן פסוק φ בצורת CNF, A מכריע האם φ ספיק. הוכיחו שקיים אלגוריתם דטרמיניסטי פולינומי B שהינתן φ כזה מוצא השמה שמספקת את φ או מכריז שאין כזו.

הוכחה: בהינתן $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$: נבדוק האם $A(\varphi)=1$. אם לא, נכריז כי φ לא ספיק. אחרת, יהי $\varphi_0=\varphi(0,x_2,\ldots,x_n)$. אם $A(\varphi_0)=1$, נמשיך רקורסיבית עם φ_0 ונזכור שהצבנו $x_1=0$.

אחרת, $A(\varphi_0)=0$, נמשיך עם $\varphi_1=\varphi(1,x_2,\ldots,x_n)$ ונזכור $x_1=1$ - ברור שזה ספיק כי φ ספיק. בסוף התהליך הרקורסיבי נפלוט את ההשמה שבנינו.

הנכונות ברורה. יש n קריאות לאלגוריתם A ועוד מספר קבוע של פעולות בין לבין, ולכן הזמן פולינומי. ■

תזכורת $\mathrm{NL}=\mathrm{NSPACE}(O(\log n))$.

הגדרה 1.1 מוודא עם מקבלת זכרון s הוא מכונת טיורינג V בעלת סרט קלט (לקריאה בלבד), סרט עבודה בגודל s תאים, וסרט עד (לקריאה בלבד) שבו הראש הקורא זז רק ימינה. V מוודא/מכריע שפה A אם

$$A=\{x\mid \exists w\ \ V(x,w)=1\}$$

נגדיר VL את מחלקת השפות שיש להן מוודא עם מגבלת זיכרון $O(\log n)$.

תרגיל $\mathrm{VL}=\mathrm{NL}$.

הוכחה: תהי $A\in\mathrm{NL}$. תהי M מכונת טירוינג אי דטרמיניסטית עם זכרון $O(\log n)$ שמכריעה את A. נתאר מוודא V מוגבל זכרון עבור A. על קלט (x,w), V מסמלץ את M על x. כאשר M מבצעת מעבר אי דטרמיניסטי, V בוחר על פי הביט הבא בעד w. V מכריע כמו M.

נכונות: אם $x\in A$, יש סדרת ניחושים שמובילה לקבלה, ולכן יש w שמתאים לסדרה זו והוא עד של x. אם $x\notin A$, כל סדרת ניחושים מובילה לדחייה, ולכן גם כל עד.

סיבוכיות: V מסמלץ את M בזיכרון $O(\log n)$ וזהו.

לכן קיבלנו $\mathrm{NL}\subseteq\mathrm{VL}$.

"מה עושים כשלא יודעים? מנחשים! זה עובד במבחנים, אז זה עובד בסימולציות..."
- המתרגל.

תהי $A \in \mathrm{VL}$. יהי V מוודא V שמכריע את A בזיכרון $O(\log n)$. נבנה מכונה אי דטרמיניסטית M שמכריעה את A. על קלט x, M מסמלצת את V. בכל פעם שהוא מנסה לגשת לסרט העד, M מנחשת את הביט שמבוקש, וממשיכה את הסימולציה. M מכריעה כמו V.

נכונות: אם יש עד, אז יש סדרת ניחושים טובה. אם אין עד, אין סדרת ניחושים טובה.

זכרון: אפשר לסמלץ את V בזכרון $O(\log n)$ - אין צורך לשמור ניחושים קודמים, כי V לא יכול לקרוא ביט מהעד יותר מפעם אחת.

לכן קיבלנו $\mathrm{VL} \subseteq \mathrm{NL}$, וסיימנו. ■

תרגיל נגדיר את A להיות שפת כל הגרפים המכוונים הקשירים חזק. הוכיחו $A \in \mathrm{NL}$.

הוכחה: נציג מוודא V. V מצפה לעד מהצורה:

$$p_{v_1,v_2}, p_{v_1,v_3}, \ldots, p_{v_1,v_n}, p_{v_2,v_1}, \ldots, p_{v_2,v_n}, \ldots, p_{v_n,v_{n-1}}$$

כאשר p_{v_i,v_j} הוא תיאור של מסלול מהקודקוד v_i לקודקוד v_j. המוודא בודק את תקינות המסלולים. לכל זוג (v_i, v_j), אם המסלולים אינם תקינים, המוודא דוחה ישירות. אם המסלולים תקינים, המוודא מחשב מתוך v_i, v_j, ששמור לו, את הזוג הבא, וממשיך אליהם. אם כל המסלולים קיימים ותקינים, המוודא יקבל, וברור שהגרף קשיר חזק. אם הגרף לא קשיר חזק, אין שום עד שמתקבל על ידי המוודא. על כן המוודא עובד כמו שצריך. לכן סיימנו. ■

תרגיל נגדיר את B להיות שפת כל הגרפים המכוונים שיש בהם רכיב קשירות חזקה שמכיל לפחות חצי מהקודקודים. הוכיחו $B \in \mathrm{NL}$

הוכחה: המוודא V מצפה לעד מהצורה הבאה:

$$p_{v,u_1}, p_{v,u_2}, \ldots p_{v,u_{\frac{n}{2}-1}}$$

כאשר p_{v,u_i} מתאר מסלול מהקודקוד v אל u_i, ומסלול להיפך, וכן $v < u_1 < \cdots <$ $u_{\frac{n}{2}-1}$. V שומר בזיכרון את v_i, u_i, i. הוא מוודא את נכונות p_{v,u_i}. אם המסלולים לא תקינים הוא דוחה. אחרת, V בודק שמתקיים $u_{i+1} > u_i$. אם לא, הוא דוחה. אם כן, נמשיך לוודא את העד. בסוף קריאת העד המוודא מקבל אם $i \geq \frac{n}{2} - 1$. ברור שאם יש בגרף רכיב קשירות גדול מספיק אז יש עד מתאים. אם V מקבל את הגרף, נובע כי $\{v, u_1, \ldots, u_{\frac{n}{2}-1}\}$ זו קבוצה בגודל $\frac{n}{2}$ של קודקודים שמוכלת ברכיב קשירות חזקה אחד של הגרף. לכן סיימנו. ■