

## סיבוכיות

© ארזים

5 באפריל 2017

**הגדרה 0.1** תהי  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . מכונת טיורינג  $M$  עם זכרון  $S(n)$  היא מכונה רגילה בעלת שלושה סרטים:

1. סרט הקלט, שעליו נמצא הקלט והוא לקריאה בלבד.
2. סרט העבודה, שעליו קוראים וכותבים לכל היותר  $S(n)$  תאים, כאשר  $n = |x|$  אורך הקלט.
3. סרט הפלט, שעליו נכתב הפלט והוא לכתיבה בלבד - הראש הקורא יכול רק לזוז ימינה.

**הגדרה 0.2**  $\text{DSPACE}(S(n))$  היא אוסף השפות שניתן לקבל על ידי מכונת טיורינג עם זכרון  $O(S(n))$ .

**תרגיל** תארו מכונת טיורינג עם זכרון  $O(\log s)$  שבהינתן נוסחא  $\varphi$  וקלט אליה  $x$ , מחשבת את  $\varphi(x)$ .  $s = |\langle \varphi \rangle, x|$  אורך הקלט.

**פתרון** נעשה מעבר in-order על העץ. בהתחלה הולכים כל הזמן שמאלה עד שמגיעים לעלה, ואז קוראים את הערך שלו, ועולים למעלה לאבא שלו. נגיע לקודקוד  $u$ , ויהיה לנו ערך  $b$  של הבן שלו כרגע. כעת נעבוד לפי מקרים:

1. אם  $u$  שער  $\vee$ ,  $b = 1$ , נעלה לאבא של  $u$  עם  $b = 1$ . אם  $u$  שעה  $\wedge$ ,  $b = 0$ , נעלה לאבא של  $u$  עם  $b = 0$ .

2. אם  $u$  שער  $\vee$ ,  $b = 0$ , נעבור לבן הבא של  $u$  עם  $b$  מאותחל. הכוונה ביחס סדר על הבנים היא לפי סדר הופעתם בקלט. אם אין עוד בנים, נעלה למעלה עם  $b = 0$ . בדומה נעבוד אם  $u$  שער  $\wedge$ ,  $b = 1$ .

3. אם  $u$  שער  $\neg$ , נעלה לאבא של  $u$  עם ההפוך של  $b$ .

הנכונות נובעת באינדוקציה. זיכרון הוא  $O(\log s)$ .

כעת נראה טיעון כללי - Padding Argument.

**הגדרה 0.3**

$$\text{PSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{DSPACE}(n^c)$$
$$E = \text{DTIME}\left(2^{O(n)}\right)$$

**תרגיל** הוכיחו כי  $E \neq PSPACE$ .

**הוכחה:** נניח בשלילה שיש שוויון, ונראה כי  $DTIME(2^{O(n^2)}) \subseteq E$  בסתירה למשפט ההיררכיה בזמן.  
 תהי  $A \in DTIME(2^{O(n^2)})$  ותהי  $M_A$  מכונה מתאימה. יהי  $\#$  תו לא באלפבית המקורי. נגדיר

$$B = \{x\#^{|x|^2-|x|} \mid x \in A\}$$

נרצה לטעון כי  $B \in DTIME(2^{O(n)}) = E$ . יהי  $y$  קלט באורך  $n$ . נבדוק כמה תווים יש לפני התו  $\#$  הראשון, ונסמן מספר זה  $k$ . נסמן תוים אלה  $x$ , ונבדוק שאחריהם מופיעים  $k^2 - k$  תוים  $\#$ . לבסוף, נריץ  $M_A$  על  $x$ , ונענה כמורה. הנכונות של ריצה זו ברורה. ננתח את הזמן:

$$O(k^2 + 2^{O(k^2)}) = O(2^{O(k^2)}) = [n = k^2] = O(2^{O(n)})$$

אם כן, לפי ההנחה,  $B \in PSPACE$ , ולכן קיים  $c \in \mathbb{N}$  עבורו  $B \in DSPACE(n^c)$ . כעת,  $A \in DSPACE(n^{2c})$ . מדוע? בהינתן קלט  $x$  של  $A$ , נריץ מכונה של  $B$  על  $x\#^{|x|^2-|x|}$  ונענה כמורה. הזיכרון הוא אכן  $O((n^2)^c) = O(n^{2c})$ . הנכונות ברורה לפי הגדרת  $B$ . לכן קיבלנו כי  $A \in PSPACE$ , כלומר מההנחה שלנו  $A \in E$ , והגענו לסתירה שרצינו. ■

**הערה 0.4** נשים לב שהשתמשנו בשתי ההכלות - ההוכחה לא מוצאת איזו מההכלות לא נכונה. למעשה זה לא ידוע.