

סיבוכיות

© ארזים

28 במרץ 2017

1 אי כריעות בעיית העצירה

משפט 1.1 השפה

$$Halt = \{(M, x) \mid M \text{ is a TM which halts on } x\}$$

אינה כריעה.

הוכחה: נניח בשלילה שיש מכונה H שמכריעה את הבעיה. נשתמש בה כדי לבנות מכונה Q שלה התכונות הבאות: Q תמיד תעצור, ואם נמנה את מכונות הטיורינג שעוצרות $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, לכל i קיים x_i שמקיים $Q(x_i) \neq M_i(x_i)$. זו סתירה (x_i יהיה הקידוד של M_i). Q פועלת באופן הבא: על קלט x , נריץ את H על (x, x) . אם H דוחה, Q מקבלת. אם H מקבלת, נריץ את M על x ונענה הפוך. התכונה הראשונה מתקיימת בבירור, כי H תמיד עוצרת, ואם H קיבלה אז M עוצרת על x , לכן גם הסימולציה שלה. נוכיח את התכונה השנייה. לכל i , נבדוק מה עושה Q על $x_i = \langle M_i \rangle$. M_i תמיד עוצרת, ולכן $H(M_i, M_i)$ מקבלת. לכן Q מריצה את M_i על $\langle M_i \rangle$ ועונה ההיפך, כלומר $Q(\langle M_i \rangle) \neq M_i(\langle M_i \rangle)$. ■

2 הסתברות

יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. משתנה מקרי הוא פונקציה $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. התוחלת של X היא

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega) X(\omega)$$

התוחלת היא לינארית, ואם המשתנים בלתי תלויים, היא גם כפלית.

משפט 2.1 (אי שוויון מרקוב) יהי X משתנה מקרי אי שלילי, $c > 0$. אזי

$$\mathbb{P}(X \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{c}$$

הוכחה: נגדיר משתנה מקרי $Z = \mathbb{1}_{\{X \geq c\}}$. נשים לב כי $X \geq cZ$ (בודקים על ידי חלוקה למקרים. ניקח תוחלת משני הצדדים:

$$\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[cZ] = c\mathbb{E}[Z] = c\mathbb{P}(Z = 1) = c\mathbb{P}(X \geq c)$$

■

ולכן נסיים.

דוגמה נניח כי $x_1, \dots, x_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות שמוגדרים באופן הבא: לכל $i, X_i = 1$ בהסתברות p , או 0 בהסתברות $1-p$, באופן בלתי תלוי בשאר. אזי

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 2pn\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[\sum x_i] = pn \text{ שכן}$$

הגדרה 2.2 יהי X משתנה מקרי. השונות של X היא

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

משפט 2.3 (אי שוויון צ'בישב)

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq c) \leq \frac{\text{Var}(X)}{c^2}$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq c) = \mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq c^2\right) \leq \frac{\text{Var}(X)}{c^2}$$

■

נחזור לדוגמא הקודמת. בגלל האי תלות נקבל

$$\text{Var}\left(\sum X_i\right) = \sum \text{Var}(X_i) = np(1-p) \leq pn$$

$$\text{שכן } \text{Var}(X_1) = \mathbb{E}\left[(X_1 - p)^2\right] = p(1-p)^2 + p^2(1-p) = p(1-p)$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum X_i - pn\right| \geq c\sqrt{pn}\right) \leq \frac{pn}{c^2 pn} = \frac{1}{c^2}$$

כלומר, נקבל חסמים טובים גם כאשר הסטייה בסדר גודל של $\sqrt{pn}$, אבל בפרט, כדי להשוות לחסם הקודם, אפשר לבחור $c \approx \sqrt{pn}$, ואז ההסתברות שמרחק של הסכום מהתוחלת pn הוא לפחות pn היא בסדר גודל של $\frac{1}{n}$.