

סיבוכיות

© ארזים

18 ביוני 2017

1 בעיות פער

ראינו את המשפט הבא בהרצאה, בלי הוכחה:

משפט 1.1 (PCP) לכל $\varepsilon > 0$ הבעיה $\text{Gap} - 3\text{SAT} \left[\frac{7}{8} + \varepsilon, 1\right]$ היא NP-שלמה.

ניזכר בבעיית 3LIN, בה אנחנו מטפלים במערכת שמוואות לינאריות מעל $\mathbb{F}_2$ עם שלושה משתנים לכל היותר בכל אחת.

מסקנה 1.2 (משפט הוסטאד) לכל $\varepsilon > 0$ הבעיה $\text{Gap} - 3\text{LIN} \left[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1 - \varepsilon\right]$ היא NP-שלמה.

תרגיל הראו רדוקציה משמרת פער בין $\text{Gap} - 3\text{LIN} \left[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1 - \varepsilon\right]$ לבין $\text{Gap} - \text{IS} \left[\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{4}\right]$.

הוכחה: בהינתן מערכת משוואות $e_1, \dots, e_n$ מעל $\mathbb{F}_2$ במשתנים $x_1, \dots, x_n$, נבנה גרף G באופן הבא: לכל משוואה e נגדיר "ענן" של ארבעה קודקודים - כל קודקוד מתאים להשמה מספקת עבור 3 המשתנים במשוואה. נוסיף צלע בין כל זוג קודקודים שההשמות המתאימות להם אינן עקביות (סותרות זו את זו) - כלומר נשים צלע בין e_1, a לבין e_2, b אם קיים משתנה x שמופיע בשתי המשוואות e_1, e_2 שההשמות a, b לא מסכימות עליו.

שלמות נניח שיש השמה $a : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ שמספקת לפחות $(1 - \varepsilon)$ מהמשוואות. נגדיר את I להיות אוסף הזוגות (e, b) ככה שההשמה a מספקת את e , וההשמה b מסכימה עם a על משתני e . נוכיח שזו קבוצה בלתי תלויה - בכל ענן בחרנו לכל היותר קודקוד אחד. אם $(e_1, b_1), (e_2, b_2)$ מחוברות בצלע, קיים משתנה שעליו הן לא מסכימות מתוך e_1, e_2 , ולכן לא ייתכן ששתייהן מסכימות עם a . לכן הקבוצה בלתי תלויה. כמו כן, a מספקת $(1 - \varepsilon)m$ משוואות, ולכן $|I| \geq (1 - \varepsilon)m$. יש $4m$ קודקודים, ולכן היחס הוא אכן $\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{4}$.

נאותות נניח שכל השמה מספקת לכל היותר $(\frac{1}{2} + \varepsilon)m$ משוואות. תהי I קבוצה בלתי תלויה. כל משתנה x מקבל ערך אחד בלבד בכל הקודקודים $(e, b) \in I$, ולכן I מגדירה השמה (אולי חלקית) a . מצד שני, הגודל של I הוא לכל היותר כמות אותם e_i שאותם a מספקת, כלומר לכל היותר $(\frac{1}{2} + \varepsilon)m$. לכן הגודל היחס של I הוא לכל היותר $\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon}{4}$.

■

כעת נדון בבעיית Max - 2SAT ונראה רדוקציה $\text{Gap} - 2\text{SAT}[c_1, c_2] \leq \text{Gap} - \text{E3SAT}[\frac{7}{8} + \varepsilon, 1]$, כאשר נקבע את c_1, c_2 בהמשך. בהינתן פסוקית φ עם n משתנים ועם m פסוקיות, לכל פסוקית $c = \alpha \vee \beta \vee \gamma$ נגדיר 10 פסוקיות 2CNF:

$$\alpha, \beta, \gamma, w_c, (\bar{\alpha} \vee \bar{\beta}), (\bar{\beta} \vee \bar{\gamma}), (\bar{\alpha} \vee \bar{\gamma}), (\alpha \vee \bar{w}_c), (\beta \vee \bar{w}_c), (\gamma \vee \bar{w}_c)$$

פלט הרדוקציה $f(\varphi)$ יהיה "וגם" של כל אלה.

שלמות נניח כי ספיקה, ותהי a השמה מספקת. נגדיר השמה b של $f(\varphi)$. נטעין כי ניתן לספק 7 מתוך 10 הפסוקיות שמתאימות לכל פסוקית b תוגדר באופן הבא: b מסכימה עם a על כל המשתנים המקוריים. לכל פסוקית c , אם a מספקת את שלושת המשתנים של c אז $b(w_c) = 1$, ואחרת $b(w_c) = 0$. יש שלושה מקרים - אם a מספקת את שלושת המשתנים, רק שניים או רק אחד. בודקים ורואים שבכל מצב b מספקת 7 מתוך 10 הפסוקיות.

נאותות תהי b השמה למשתני $f(\varphi)$. נגדיר את a להיות הצמצום של b למשתנים המקוריים. נטען שמתוך 10 הפסוקיות, תמיד אפשר לספק לכל היותר 7. יתר על כן, אם $c = \alpha \vee \beta \vee \gamma$ לא מסתפק, לכל ערך של w_c מסתפקות לכל היותר 6 פסוקיות. אם $b(w_c) = 1$ זה ברור. אם $b(w_c) = 0$, אפשר לספק רק 4 משוואות. כעת, a מספקת לכל היותר $\frac{7}{8} + \varepsilon$ מהפסוקיות, ולכן b מספקת לכל היותר

$$\left(\frac{7}{8} + \varepsilon\right) \frac{7}{10} + \left(\frac{1}{8} - \varepsilon\right) \frac{6}{10} = \frac{55}{80} + \frac{\varepsilon}{10}$$

קיבלנו את הקבועים

$$c_1 = \frac{55}{80} + \frac{\varepsilon}{10}, c_2 = \frac{56}{80}$$

פער ממש קטן.

משפט 1.3 לכל $c > 0$ אין אלגוריתם c -קירוב לבעיית הקבוצה הבלתי תלוייה.

תרגיל

$$\text{Gap} - \text{IS}[\alpha, \beta] \leq_p \text{Gap} - \text{IS}[\alpha^2, \beta^2]$$

ושימו לב שזה גורר את המשפט.

פתרון בהינתן גרף $G = (V, E)$ עם $|V| = n$, נגדיר $G^2 = (V^2, E')$, כאשר $E' = \{((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \mid \exists i, j \in \{1, 2\} \ (u_i, v_j) \in E\}$

שלמות נניח כי U קבוצה בלתי תלוייה בתוך G בגודל לפחות βn . אכן, $U \times U$ בלתי תלוייה בגרף G^2 וכן

$$|U \times U| = |U|^2 \geq \beta^2 n^2$$

כנדרש.

נאותות תהי $I \subseteq V \times V$ בלתי תלוייה. נניח כי $|I| \geq \alpha^2 n^2$, ונראה שנוכל לבנות קבוצה בלתי תלוייה בתוך G בגודל לפחות αn (וזה יוכיח את מה שרצינו). נגדיר

$$U_1 = \{v \in V \mid \exists u \in V (v, u) \in I\}$$

$$U_2 = \{u \in V \mid \exists v \in V (v, u) \in I\}$$

כמובן, $I \subseteq U_1 \times U_2$, ולכן $|U_1| |U_2| \leq \alpha^2 n^2$ ופברט יש $i \in \{1, 2\}$ עם $|U_i| \geq \alpha n$. נניח בלי הגבלת הכלליות שזו U_1 ונגדיר $I' = U_1$. נראה שזו בלתי תלוייה - נניח שיש $u, v \in I'$ שיש ביניהם צלע. קיימים $u', v' \in I$ עם $(u, u'), (v, v') \in I$ (מההגדרה). זו סתירה לאי תלות של I מהגדרת G^2 .

כעת, נדבר על בעיית כיסוי בקודקודים (Vertex - Cover). כיסוי בקודקודים של $G = (V, E)$ זו קבוצה בתוך C כך שלכל צלע בתוך G יש קצה בתוך C .

טענה 1.4 U בלתי תלוייה אם ורק אם $V \setminus U$ כיסוי בקודקודים.

הוכחה: נניח כי U בלתי תלוייה. לכל צלע (u, v) , לא ייתכן ששניהם בתוך U כי היא בלתי תלוייה. לכן המשלים מכסה את כל הקשתות. בכיוון השני, נניח כי $V \setminus U$ כיסוי בקודקודים, ונניח כי $e = (v, u)$ צלע. אחד הקודקודים בוודאות במשלים, ולכן U אכן בלתי תלוייה. ■

מסקנה 1.5 לכל גרף G , גודל הכיסוי המינימלי הוא n פחות גודל הקבוצה הבלתי תלוייה המקסימלית.

מסקנה 1.6 $\text{Gap} - \text{IS}[\alpha, \beta] \leq \text{Gap} - \text{VC}[1 - \alpha, 1 - \beta]$

מסקנה 1.7 קיים קבוע $\rho > 1$ כך שאין קירוב ρ עבור VC.

אז למה את VC אפשר לקרב בפקטור 2, ואת IS אי אפשר לקרב באף פקטור קבוע? כזכור, אם A בעיית מקסימיזציה, קושי של $\text{Gap} - A[\alpha, \beta]$ גורר קושי של קירוב לכדי $\frac{\alpha}{\beta}$. בפרט, עבור IC, ראינו שזה גורר קושי של קירוב לכדי $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, שהוא קטן אפילו יותר. במקרה של VC, לפני הרדוקציה היה לנו קושי של $\frac{1-\alpha}{1-\beta}$, וקיבלנו קושי של $\frac{1-\alpha}{1-\beta} < \frac{1-\alpha}{1-\beta} \frac{1+\alpha}{1+\beta}$, כלומר המצב שלנו רק התדרדר. לאיזה קבוע ρ אפשר להראות שקשה לקרב VC? יודעים שהחסם העליון הוא 2, יודעים קבוע טוב יותר מאשר $\frac{7}{6} - \epsilon$, אבל לא יודעים טוב יותר.