

סיבוכיות

© ארזים

13 ביוני 2017

1 אלגוריתמי קירוב ובעיות פער

נחזור על האלגוריתם החמדן עבור Vertex – Cover ועל הדוגמה הנגדית שלו. האלגוריתם לוקח בכל שלב את הקודקוד בעל הדרגה המקסימלית שנותר בגרף, ומסיר אותו עם כל קשתותיו. בשביל הדוגמה הנגדית, נבנה גרף עם m רמות, ככה שברמה i יש $\lfloor \frac{m}{i} \rfloor$ קודקודים, וכל קודקוד ברמה $i \geq 2$ מחובר בקשת אל i קודקודים מהרמה הראשונה. אף קודקוד ברמה הראשונה לא מחובר ליותר מקודקוד אחד ברמה i . נשים לב שלקודקוד ברמה $i \geq 2$ יש i שכנים, וברמה 1 יש לכל היותר $m - 1$ שכנים. הכיסוי שנוציא יהיה כל הגרף, שבו בערך $m \log m - m$ קודקודים.

1.1 אופטימיזציה

בהינתן יחס $R \subseteq \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^*$, הגדרנו $Y_x = \{y \mid (x, y) \in R\}$, והנחנו שיש פונקציית ערך $\text{Val}_x : Y_x \rightarrow \mathbb{R}_+$. בבעיית מקסימיזציה $\text{Opt}(x) = \max \text{Val}_x(y)$, ובבעיית מינימיזציה מגדירים עם מינימום.

הגדרה 1.1 אמרנו שאלגוריתם A נותן c -קירוב לבעיית מקסימום R אם לכל קלט x מתקיים

$$\frac{1}{c} \text{opt}(x) \leq \text{Val}_x(A(x)) \leq \text{opt}(x)$$

הגדרה 1.2 בעיית הפער $\text{Gap} - R[\alpha, \beta]$ (כאשר R בעיית מקסימום) מנסה להכריע, בהינתן קלט x , מה מהבאים נכון:

1. קיים y עם $\text{Val}_x(y) \geq \beta$.

2. לכל y מתקיים $\text{Val}_x(y) \leq \alpha$.

התנאים זרים אבל לא משלימים. אם x כזה שאף תנאי לא מתקיים, אפשר לענות כל דבר.

הגדרה 1.3 רדוקציה משמרת פער בין הבעיות $\text{Gap} - R[\alpha_1, \beta_1]$, $\text{Gap} - R[\alpha_2, \beta_2]$ היא פונקציה $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ שמקיימת

$$\text{opt}(x) \geq \beta_1 \Rightarrow \text{opt}(f(x)) \geq \beta_2$$

$$\text{opt}(x) \leq \alpha_1 \Rightarrow \text{opt}(f(x)) \leq \alpha_2$$

נסמן $\leq_p, \leq_L$ כמו בעבר אם הרדוקציות הן בזיכרון לוגריתמי/זמן פולינומי.

בעיה $\text{Gap} - 3\text{SAT}[\alpha, \beta]$ - בהינתן נוסחת 3CNF , האם יש השמה שמספקת לפחות β מהפסוקיות, או שכל השמה מספקת לכל היותר אחוז α מהפסוקיות.

משפט 1.4 (משפט PCP - Probabilistically Checkable Proof) לכל $\varepsilon > 0$ הבעיה $\text{Gap} - 3\text{SAT}[\frac{7}{8} + \varepsilon, 1]$ היא NP-קשה (בפרט שלמה).

מסקנה 1.5 אם $P \neq NP$ אז אין אלגוריתם קירוב יעיל עבור $\text{Gap} - 3\text{SAT}$ עם יחס קירוב $\frac{8}{7}$.

הערה 1.6 תמיד ניתן לספק $\frac{7}{8}$ מהפסוקיות.

בעיה $\text{Gap} - \text{Clique}[\alpha, \beta]$ - האם יש בגרף קליקה עם לפחות β קודקודים או שכל קליקה מכילה לכל היותר α קודקודים.

משפט 1.7 הבעיה $\text{Gap} - \text{Clique}[(\frac{7}{8} + \varepsilon)\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ היא NP-קשה (בפרט שלמה).

הוכחה: אותה רדוקציה כמו $3\text{CNF} \rightarrow \text{CLIQUE}$. בהנתן נוסחת 3CNF מהצורה $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ שבכל פסוקית בה יש 3 ליטרלים, נגדיר גרף עם $3m$ קודקודים. כל קודקוד יתאים לליטרל אחד בפסוקית אחת, ונחבר בקשת $(c_i, l_1) \leftrightarrow (c_j, l_2)$ אם $c_i \neq c_j$ וגם l_i קונסיסטנטי עם l_2 (הם לא השלילה זה של זה). אם הנוסחה המקורית ספיקה, אז מכל שלישייה נוכל לבחור ליטרל שהסתפק ע ידי ההשמה (יש לפחות אחד) ואלה יהיה קליקה. זו קליקה בגודל לפחות m בגרף בגודל $3m$ (זה כיוון אחד של הרדוקציה, $yes \rightarrow yes$). עבור הכיוון השני, נניח שבגרף יש קליקה בגודל k . בכל שלישייה יש לכל היותר ליטרל אחד מהקליק. ניקח השמה קונסיסטנטית עם הליטרלים שבקליקה (מנחשים על האחרים), ומהגדרת הגרף ההשמה מוגדרת היטב ותספק לפחות k פסוקיות. לכן הראינו את הרדוקציה. ■

כעת נראה מחלקה חדשה של בעיות, שיהיה קל לעשות איתן רדוקציות - Generalized Constraint Satisfaction Graphs. יש לנו גרף $G = (V, E)$, ויש לנו Σ שהיא אלפבית (או אפשרויות לצביעה חוקית). יש לנו גם אילוצים $\phi : E \rightarrow P(\Sigma \times \Sigma)$, כלומר לכל $e \in E$ הזוג הקבוצה $\phi(e)$ היא אוסף הצביעות המותרות של קודקודי e . בהינתן (V, E, Σ, ϕ) כזה, השאלה היא האם יש צביעה של הקודקודים באופן שיספק את ϕ , כלומר האם יש $c : V \rightarrow \Sigma$ כך שלכל $e = (u, v)$ מתקיים $(c(u), c(v)) \in \phi(e)$. מה שמעניין בקבוצה Σ זה הגודל שלה, לכן לפעמים נדבר על $k\text{CSG}$, שבו $|\Sigma| = k$.

דוגמא 3 צביעה - ניקח $|\Sigma| = 3$, ולכל e

$$\phi(e) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 1)\}$$

דוגמא Independent Set - ניקח $|\Sigma| = 2$ ואז

$$\phi(e) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$$

לבעיות CSG ניתן להתאים באופן טבעי שני סוגי בעיות אופטימיזציה.

1. נחפש צביעה חלקית, גדולה ככל האפשר, כך שכל האילוצים שקודקודיהם נצבעו יסתפקו. זה נקרא $\text{max}_V - \text{CSG}$.

2. נתעקש על צביעה מלאה ונרצה למקסם את כמות האילוצים שהסתפקו. זה נקרא $\max_E - \text{CSG}$.

דוגמא נחזור לבעיית Independent Set. גרסת $\max_V - \text{CSG}$ טובה תהיה עם $\Sigma = \{1\}$, כאשר מנסים למצוא את הקבוצה הבלתי תלויה המקסימלית.

כשמדברים על צביעה חלקית נחשוב על הצבעים בתור $\Sigma \cup \{\perp\}$, כאשר $\perp$ הוא מעין Null.

דוגמא $\text{Max} - 3\text{SAT}$ - בהינתן נוסחת 3CNF נגדיר את הגרף הבא: לכל פסוקית נתאים קודקוד, והצבעים יהיו $\Sigma = \{1, 2, 3\}$. בין כל שני קודקודים תהיה קשת, והאילוץ על הקשת $e = (c_1, c_2)$ ידרוש עקביות (צבע אומר איזה ליטרל מסתפק). אם הנוסחא ספיקה אז יש צביעה מלאה המספקת את כל האילוצים. בפרט, גרסת $\max_V$ של הבעיה מתאימה לבעיה של לספק כמה שיותר פסוקיות.

מסקנה 1.8 הבעיה $\text{Gap}_V - 3\text{CSG} \left[\frac{7}{8} + \varepsilon, 1 \right]$ היא NP-קשה.

דוגמא לבעיה מהסוג השני: $\text{Max} - \text{Cut}$. $\Sigma = \{0, 1\}$, ולכל קשת e נותנים $\phi(e) = \{(1, 0), (0, 1)\}$. פתרון לבעיית $\max_E - 2\text{CSG}$ הוא שקול למציאת $\text{Max} - \text{Cut}$, וגם כאן ניתן לדבר עם $\text{Gap}_E - \text{kCSG}[\alpha, \beta]$, כלומר בעיות בהן ניתן לספק על ידי צביעה מלאה לפחות β מהאילוצים, או שכל צביעה מלאה מספקת לכל היותר α מהם.

משפט 1.9

$$\text{Gap}_v - \text{kCSG}[\delta, 1] \leq_L \text{Gap} - \text{IS} \left[\frac{\delta}{k}, \frac{1}{k} \right]$$

הוכחה: קלט לבעיה $\text{Gap}_v - \text{kCSG}$ הוא גרף $G = (V, E)$ ופונקציית אילוץ ϕ . נגדיר גרף חדש:

$$V' = V \times \Sigma, |V'| = k|V|$$

ובו נחבר בקשת $(u, j) \rightarrow (v, i)$ אם $v = u$ או $\phi((v, u)) \ni (i, j)$ (בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח שהגרף כאן מלא).

נראה שלמות (כן עובר לכן): אם יש צביעה $c : V \rightarrow \Sigma$ מלאה המספקת את ϕ אז מכל "ענף" (אוסף עותקים של קודקוד עם כל הצבעים) ניקח את הקודקוד $(v, c(v))$, כי אם $(v, c(v)) \rightarrow (u, c(u))$ וגם $v \neq u$ אזי $\phi((v, u)) \ni (c(v), c(u)) \notin \phi$ בסתירה לכך שהצביעה מספקת את ϕ . לכן אכן יש IS בגודל $\frac{|V'|}{k}$.

נראה נאותות (לא עובר ללא): נניח שיש IS בגודל לפחות α אחוזים מהקודקודים, ונראה קיום צביעה של $\alpha \cdot k$ מהקודקודים. IS יכולה להשתמש בכלל היותר קודקוד אחד מכל ענף. לכן, אותו IS נוגעת בכלל היותר αk מהענפים. הקבוצה הבלתי תלויה מגדירה צביעה של αk מהקודקודים באופן שאף אילוץ ביניהם לא הופר. ■

משפט 1.10 לכל k, l שלמים, $\delta > 0$ מתקיים

$$\text{Gap}_V - \text{kCSG}[\delta, 1] \leq_L \text{Gap}_V \text{k}^l \text{CSG}[\delta^l, 1]$$

הוכחה: יהי $G = (V, E)$ הקלט לבעיית kCSG. בלי הגבלת הכלליות כל הגרפים מלאים, ואז נגדיר $G' = (V', E')$ עם

$$V' = V^l$$

כעת יש להגדיר את ϕ' . קבוצת הצבעים תהיה $\Sigma' = \Sigma^l$ בגודל k^l . נחשוב על צבע כעל ווקטור באורך l גם כן. בהינתן שני קודקודים

$$u = (u_1, \dots, u_l), v = (v_1, \dots, v_l)$$

האילוץ ביניהם יודא קונסיסטנטיות עם ϕ . כלומר:

1. אם יש i, j עם $v_i = u_j$, אז נדרוש הצבע עבור v_i בתוך $c(v)$ יהיה זהה לצבע של u_j בתוך $c(u)$.

2. באופן כללי יותר, נרצה שהצבע של v_i בתוך $c(v)$ והצבע של u_j בתוך $c(u)$, לכל i, j , יקיימו את האילוץ $\phi(v_i, u_j)$.

נאותות נראה בשיעור הבא. שלמות: אם יש $c : V \rightarrow \Sigma$ המספק את כל ϕ , נגדיר $c' : V' \rightarrow \Sigma'$ על ידי

$$c'(v_1, \dots, v_l) = (c(v_1), \dots, c(v_l))$$

■

וברור שזה עובד.

מסקנה 1.11

$$\text{Gap} - 3\text{SAT} \left(\frac{7}{8} + \varepsilon, 1 \right) \leq_L \text{Gap}_V - 3\text{SAT} \left(\frac{7}{8} + \varepsilon, 1 \right) \leq_L \text{Gap}_v - 3^l \text{CSG} \left[\left(\frac{7}{8} + \varepsilon \right)^l, 1 \right] \leq \text{Gap} - \text{IS} \left[\frac{\left(\frac{7}{8} - \varepsilon \right)^l}{3^l} \right],$$

מזה נקבל שאין אלגוריתם שמקרב את IS בפקטור $\left(\frac{7}{8} + \varepsilon \right)^l$ (אלגוריתם יעיל לפחות, וזה אם $P \neq NP$).

מסקנה 1.12 אף אלגוריתם יעיל לא נותן קירוב קבוע עבור IS (או קליקה), לפחות אם $P \neq NP$.

הערה 1.13 ישנו המשפט הבא: לכל $\varepsilon > 0$, NP-קשה להכריע האם יש IS בגודל לפחות $n^{1-\varepsilon}$ או שכל IS הוא בגודל עד n^ε בגרף עם n קודקודים.