

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

29 במאי 2017

תהי f גזירה בתחום U , ותהי $z_0 \in U$. נגדיר

$$R = \sup \{r \geq 0 \mid B(z_0, r) \subseteq U\}$$

אזי f אנליטית בנקודה z_0 וטור החזקות שמתאר אותה מתכנס ברדיוס לפחות R . אם רדיוס ההתכנסות לטור הוא R אז הטור מתכנס במידה שווה על קומפקטיות בתוך $B(z_0, r)$. בנוסף הוא לא מתכנס כלל לאף $z \notin \overline{B}(z_0, R)$, אבל אנחנו לא יודעים מה קורה בשפה. מה אם יש קטבים? למשל $f = \frac{1}{1-z} = \sum z^n$ בעלת רדיוס התכנסות של 1 - בנקודה $z = 1$ יש קוטב,

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty$$

לכן לא קיימת פונקציה גזירה $g : B(0, 1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ שמזדהה עם f על $B(0, 1)$. מה גבי הפונקציה $\frac{1}{1+x^2}$? רדיוס ההתכנסות של טור החזקות שלה באפס הוא 1, למרות שלכאורה אין בעיה בציר הממשי - וזאת בגלל הקטבים בנקודות $\pm i$. נתבונן בענף הסטנדרטי של הלוגריתם Log , ונפתח אותו לטור חזקות סביב 1. זה שקול לפיתוח $\text{Log}(1-z)$ סביב 0 ונקבל

$$\text{Log}(1-z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

כעת נמצא קדומה של $1 - \text{Log}(1-z)$ ונקבל

$$(1-z) \text{Log}(1-z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)n} \right) - z$$

משפט 0.1 אם טור חזקות $f(z) = \sum a_n z^n$ מתכנס ברדיוס בדיוק R , אז קיימת $z_0 \in \partial B(0, R)$ כך שאין אף פונקציה אנליטית $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ שמוגדרת בסביבה של z_0 ומסכימה עם f על $U \cap B(0, R)$.

הוכחה: נניח בשלילה שלא, ואז לכל $z \in \partial B(0, R)$ אפשר לבנות $g_{z_0} : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ כזו. אפשר להחליף את U בגזרה $U = \{z \mid |z| < R + \varepsilon, \text{Arg}(z) \in I\}$ כאשר $z_0 \in U_{z_0}$. נשים לב שהאיחוד $\bigcup U_z$ מכסה את השפה, שהיא קומפקט, ולכן יש תת כיסוי סופי $\bigcup U_{z_i}$ נסמן

$$\varepsilon = \min_i \{\varepsilon_i\}$$

שמתאימים לנקודות z_i בהגדרת U_{z_i} . נשים לב שניתן להדביק את כל הפונקציות שלנו לפונקציה מהכדור $B(0, R + \varepsilon)$ אל כל המישור, שהיא אנליטית, ומסכימה עם f . לכן הטור מתכנס ברדיוס לפחות $R + \varepsilon$, בסתירה.

נותר לנו להוכיח שלכל $z \in U_{z_1} \cap U_{z_2}$ הפונקציות מסכימות, כלומר $g_{z_1}(z) = g_{z_2}(z)$. נשים לב שאם החיתוך אינו ריק, אז הוא קבוצה קמורה, למעשה גזרה בעצמו, ובפרט נחתך על $B(0, R)$. נסמן $V = U_{z_1} \cap U_{z_2} \cap B(0, R) \neq \emptyset$. אזי $f|_V = g_{z_2}|_V = g_{z_1}|_V$. מיחידות ההמשכה האנליטית נקבל שוויון על כל החיתוך. ■

משפט 0.2 (שנראה בשיעור הבא) אם $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה וחד־חד־ערכית אז היא לינארית.

אנלוג לספירת רימן - אם $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ גזירה וחד־חד־ערכית אז היא העתקת מוביוס.

משפט 0.3 אם $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה וקיים הגבול של f בנקודה z_0 , אז אפשר להמשיך את f אנליטית בנקודה z_0 .

משפט 0.4 (מוררה) אם האינטגרל על משולשים של f רציפה מתאפס אז f גזירה/אנליטית.