

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

15 במאי 2017

בשיעור ראינו את המשפט הבא:

משפט 0.1 (עקרון הארגומנט) נתונה f גזירה על תחום U ועל שפה של מסילה α כך שהצמצום $f|_\alpha$ לא מתאפסת. אזי כמות האפסים של f בתוך U היא

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f'}{f} dz = \text{Ind}_{f \circ \alpha}(0)$$

דוגמה עבור f כזו, ניקח $g = \frac{1}{f}$, ואז

$$\frac{g'}{g} = \frac{-\frac{1}{f^2} f'}{\frac{1}{f}} = -\frac{f'}{f}$$

הגדרה 0.2 מסילה $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ עם $\alpha(a) = \alpha(b)$ תקרא פשוטה אם $f|_{[a,b]}$ חד-חד-ערכית.

הגדרה 0.3 α תקרא פשוטה הומולוגית אם $\mathbb{C} \setminus \text{Im} \alpha$ מתפצל לשני רכיבי קשירות, שייקראו פנים וחוץ, כאשר החוץ הוא כל הנקודות עבורן יש למסילה α אינדקס 0, והפנים הוא שאר הנקודות, שבו נדרוש שיש למסילה α אינדקס ± 1 . הסימן הזה ייקרא גם הסימן של המסילה (כלומר המסילה תקרא חיובית או שלילית לפי האוריינטציה שלה).

משפט 0.4 (ז'ורדן) כל מסילה פשוטה היא פשוטה הומולוגית, ויתר על כן, $\text{Im} \alpha$ היא השפה גם של הפנים וגם של החוץ.

לא נוכיח או נשתמש במשפט. הוכחה לא מסובכת מאוד שלו תעלה לאתר הקורס.

משפט 0.5 תהא α פשוטה, U הפנים של α , f גזירה/אנליטית על U ובסביבה של α , וכן f חד-חד-ערכית על $\text{Im} \alpha$. אזי $f \circ \alpha$ מסילה פשוטה, ונסמן V את הפנים שלה. אזי

$$f : U \rightarrow V$$

היא חד-חד-ערכית ועל.

הוכחה: רוצים להראות שלכל $w \in V$ קיים ויחיד מקור בתוך U . כלומר שלמשוואה $g(z) = f(z) - w = 0$ יש שורש יחיד בתוך U . מספר השורשים הוא

$$\text{Ind}_{g \circ \alpha}(0) = \text{Ind}_{f \circ \alpha}(w) = \begin{cases} 1 & w \in V \\ 0 & w \in \mathbb{C} \setminus \{V \cup \text{Im} \alpha\} \end{cases}$$

הנחנו כאן כי $\alpha, f \circ \alpha$ הן בעלות אותה אוריינטציה. אם היינו מניחים בשלילה שהאוריינטציה מתהפכת, היינו מקבלים סתירה לגזירות של f בכל U מתוך משפט הארגומנט. הראינו גם שלכל $z \in U$, $f(z)$ לא נמצא בחוץ של $f \circ \alpha$. נצטרך לוודא שהוא לא יכול להיות על $\text{Im}(f \circ \alpha)$. ממשפט ההעתקה הפתוחה, עבור $B(z, \delta) \subseteq U$, תמונתו מכילה סביבה של $f(z)$. אם $f(z) \in \text{Im}(f \circ \alpha)$, אז תמונת הכדור תכיל נקודות גם מהפנים וגם מהחוץ. כלומר נקבל נקודות מתוך U שעוברות אל החוץ של $f \circ \alpha$, וזו סתירה למה שאמרנו לפני רגע. לכן קיבלנו את מה שרצינו להוכיח. ■

משפט 0.6 (רושה) אם f, g אנליטיות בתחום U ובשפה ∂U , ומתקיים על ∂U האי שוויון

$$|f - g| < |f| + |g|$$

אז מספר השורשים של f ושל g עם ריבוי הוא שווה. גרסה אסימטרית - אם $|f| < |g|$, אזי לפונקציות $f, f + g$ יש את אותו מספר שורשים (כולל ריבוי).

מסקנה 0.7 (המשפט היסודי של האלגברה) ניקח

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

עבור R מספיק גדול, למשל $1, |a_0|, \dots, |a_{n-1}| < R$ יתקיים

$$|z|^n > |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0|$$

לכל $z \in \partial B(0, R)$. ממשפט רושה נובע כי יש לפונקציות $z^n, p(z)$ אותו מספר שורשים בתוך $B(0, R)$, כלומר יש לפולינום p שורשים בריבוי כולל n בתוך $B(0, R)$.

דוגמה ניקח $f(z) = z^5 + 15z + 1$. הראו כי ארבעה מתוך חמשת השורשים נמצאים בטבעת $\{z \mid \frac{3}{2} < |z| < 2\}$.

פתרון נשים לב שעבור $|z| = 2$ מתקיים

$$|z^5| = |z|^5 = 2^5 = 32$$

ולעומת זאת

$$|15z + 1| \leq 15|z| + 1 = 31$$

ועל כן מרושה לפונקציות $z^5, z^5 + 15z + 1$ יש אותו מספר שורשים בתוך $B(0, 2)$, כלומר 5. עבור $|z| = \frac{3}{2}$, נקבל

$$|15z| = \frac{15 \cdot 3}{2} > 20$$

$$|z^5 + 1| \leq |z|^5 + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 + 1 = \frac{243}{32} + 1 < 11$$

ועל כן מרושה יש לפונקציות $15z, z^5 + 15z + 1$ יש אותו מספר שורשים בתוך $B(0, \frac{3}{2})$. כלומר 1.

דוגמה יהא

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$$

הראו כי לכל $R > 0$, עבור n גדול מספיק, שורשי $P_n(z)$ כולם מחוץ לכדור $B(0, R)$.
פתרון נשים לב כי $P_n \rightarrow e^z$ במידה שווה על קומפקטיות, ובפרט על $\overline{B(0, R)}$. לכן עבור n גדול מספיק יתקיים לכל z עם $|z| < R$:

$$|P_n(z) - e^z| < e^{-R} \leq |e^z|$$

ומרושה נקבל שיש אותה כמות של שורשים בכדור לפונקציות $e^z, P_n(z)$ - כלומר 0.

טענה 0.8 יהא

$$p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

פולינום. לכל $\delta > 0$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שאם

$$q(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$$

פולינום שמקדמיו מקיימים $|b_i - a_i| < \varepsilon$ לכל i , אזי כל שורשי q נמצאים במרחק לכל היותר δ משורשים של P .

הוכחה: אפשר להקטין את δ כרצוננו. נניח כי

$$\delta < \delta_0 = \frac{\min |z_i - z_j|}{3}$$

כאשר z_i, z_j שורשים של p . אזי p לא מתאפס על השפה של $\partial B(z_i, \delta)$ לכל i . נסמן

$$R = \max |z_i| + \delta_0$$

אזי

$$|p - q| < \varepsilon \sum_{k=0}^n |z|^k \leq \varepsilon (n+1) R^n$$

נבחר ε עבורו

$$|p - q| < \min_{\bigcup \partial B(z_i, \delta)} |p|$$

ומרושה מסיימים.

■