

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

8 במאי 2017

1 שאריות

נתבונן בפונקציה f גזירה בתחום U , למעט אולי בנקודה $z_0 \in U$. נאמר כי f בעלת סינגולריות אינטגרבילית בנקודה z_0 אם בסביבה מנוקבת של z_0 הפונקציה f היא מקיימת $f = g'$, שזה שקול לכך שמתקיים, עבור $\varepsilon > 0$ קטן מספיק,

$$\int_{\partial B(z_0, \varepsilon)} f(z) dz = 0$$

כאשר f גזירה על U פרט אולי לנקודה $z_0 \in U$, נקבל שקיים ויחיד קבוע $a \in \mathbb{C}$ עבורו לפונקציה $f - \frac{a}{z - z_0}$ יש סינגולריות אינטגרבילית. אפשר לחשב את a מפורשות:

$$a = \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \varepsilon)} f(z) dz$$

קבוע זה נקרא השארית של f בנקודה z_0 .
תוצאה חשובה שראינו: אם קיים גבול

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = a$$

אזי מתקיים $a = \text{Res}(f, z_0)$.

דוגמא $f(z) = \frac{1}{z^2}$ היא בעלת סינגולריות אינטגרבילית בנקודה 0:

$$f = \left(-\frac{1}{z}\right)'$$

בפרט

$$\text{Res}(f, 0) = 0$$

דוגמא f, g גזירות בתחום U , ועבור $z_0 \in U$ מתקיים $g(z_0) = 0 \neq g'(z_0)$. אזי

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

הוכחה:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} (z - z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

■

דוגמא ניקח $p(z)$ פולינום כלשהו, ונתבונן בפונקציה $\frac{p'(z)}{p(z)}$ - סינגולרית רק בשורשים של p . אם z_0 שורש פשוט של p , אזי $p'(z_0) \neq 0$ ולכן

$$\text{Res}\left(\frac{p'}{p}, z_0\right) = \frac{p'(z_0)}{p'(z_0)} = 1$$

נראה ישירות מההגדרה - נכתוב

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - z_0) q(z) \\ p'(z) &= q(z) + (z - z_0) q'(z) \\ \frac{p'(z)}{p(z)} - \frac{1}{z - z_0} &= \frac{p'(z)}{p(z)} - \frac{q(z)}{p(z)} = \frac{q(z) + (z - z_0) q'(z)}{p(z)} - \frac{q(z)}{p(z)} = \frac{(z - z_0) q'(z)}{p(z)} = \\ &= \frac{(z - z_0) q'(z)}{(z - z_0) q(z)} = \frac{q'(z)}{q(z)} \end{aligned}$$

ופונקציה זו גזירה בסביבת z_0 .
במקרה הכללי:

$$p(z) = (z - z_0)^m q(z)$$

כאשר $m \geq 1, q(z_0) \neq 0$. נכתוב

$$\begin{aligned} p'(z) &= m(z - z_0)^{m-1} q(z) + (z - z_0)^m q'(z) \\ \frac{p'(z)}{p(z)} &= \frac{m(z - z_0)^{m-1} q(z) + (z - z_0)^m q'(z)}{(z - z_0)^m q(z)} = \frac{mq(z) + (z - z_0) q'(z)}{(z - z_0) q(z)} = \\ &= \frac{m}{z - z_0} + \frac{q'(z)}{q(z)} \end{aligned}$$

ומכאן מקבלים בקלות שהשארית היא m .

דוגמא ניקח $f = \frac{1}{\sin z}$ - סינגולרית בכל נקודה מהצורה $\pi k, k \in \mathbb{Z}$. נחשב לפי הנוסחה:

$$\text{Res}(f, \pi k) = \lim_{z \rightarrow \pi k} \frac{1}{\sin(z)} (z - \pi k) = \lim_{z \rightarrow \pi k} \frac{z - \pi k}{\sin(z) - \sin(\pi k)} = \frac{1}{\cos(\pi k)} = (-1)^k$$

דוגמא ניקח

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n$$

כאשר $m \geq 1$. נניח שהטור מתכנס ברדיוס R . הפונקציה סינגולרית בנקודה 0 , ומתקיים $\text{Res}(f, 0) = a_{-1}$, כי כדי שתהיה קדומה צריך שיתקיים $a_{-1} = 0$.

דוגמא ניקח

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

טור זה מתכנס במידה שווה ובהחלט בתחום $\{|z| > r\}$, לכל $r > 0$. שוב, צריך להיפטר מהגורם של $\frac{1}{z}$, ולכן

$$\text{Res}\left(e^{\frac{1}{z}}, 0\right) = 1$$

משפט 1.1 (משפט השארית) תהי f פונקציה גזירה על U , אם נקודות סינגולריות $\{z_i\}_{i=1}^n$. אזי לכל מסילה γ מתקיים

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, z_i) \text{Ind}_{\gamma}(z_i)$$

דוגמא נניח כי $\gamma = \partial B(0, R)$ שמכיל את כל השורשים של פולינום p . נסמן z_i את השורשים של p , m_i את הריבויים שלהם. אזי

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_i \frac{m_i}{z - z_i} = \sum_i \text{Res}(f, z_i) \text{Ind}_{\gamma}(z_i) = \sum_i m_i = \deg(p)$$

דוגמא ניקח מסילה γ אליפטית שמקיפה את $0, \pi, 2\pi$ אבל לא את $-\pi$ או 3π . כעת

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\sin z} dz &= \text{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, 0\right) \text{Ind}_{\gamma}(0) + \text{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, \pi\right) \text{Ind}_{\gamma}(\pi) + \text{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, 2\pi\right) \text{Ind}_{\gamma}(2\pi) = \\ &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

דוגמא אנחנו מכירים את האינטגרל הממשי הבא:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \pi$$

הראינו זאת גם בתרגילי הבית בקורס זה, על ידי לקיחת ריבוע באורך שגדל. אפשר לחשב את האינטגרל על הריבוע הזה להיות π על ידי שימוש במשפט השארית - הסינגולריות של $\frac{1}{z^2+1}$ הן בנקודות $\pm i$, והשאריות הן בהתאמה $\pm \frac{1}{2i}$.