

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

24 באפריל 2017

1 אינטגרציה

בשיעורים ראינו כל מני סוגי אינטגרציה:

- אינטגרל רימן על קטעים לפונקציות רציפות.
- אינטגרל על פני מסילות רציפות כלשהן.
- לפונקציות שהן מקומית נגזרת, ובפרט כל הפונקציות הגזירות.

הגדרה 1.1 עבור פונקציה רציפה f , ומסילה $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה ברציפות, נגדיר

$$\oint_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

טענה 1.2 אם f נגזרת מקומית, γ גזירה ברציפות, אזי

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

הוכחה: מספיק לבדוק עבור תחום U שבו f היא נגזרת גלובלית, שכן שני האגפים אדיטיביים תחת שרשור מסילות. נסמן $f = F'$ ואז

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

■

טענה 1.3 תהי $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ מסילה, ותהי פרמטריזציה אחרת של γ שנתונה על ידי $s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, כך שמתקיים

$$s(0) = 0, s(1) = 1$$

ונחליף את $\gamma(t)$ בערך $\gamma(s(t))$. אזי

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma \circ s} f(z) dz$$

הוכחה: נניח כי U_i כיסוי של $\text{Im } \gamma$ על ידי סביבות פתוחות בהן f נגזרת של F_i , ונניח כי $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ זמנים עבורים

$$\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$$

אזי

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\gamma(t_{i+1})) - F_i(\gamma(t_i))$$

במקרה שההעקה s מונוטונית עולה, ועל כן חד־חד־ערכית ועל, נבחר $t'_i = s^{-1}(t_i)$ כך שמתקיים

$$s([t'_i, t'_{i+1}]) = [t_i, t_{i+1}]$$

ועל פי הגדרה נקבל

$$\int_{\gamma \circ s} = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\gamma(s(t'_{i+1}))) - F_i(\gamma(s(t'_i))) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\gamma(t_{i+1})) - F_i(\gamma(t_i))$$

■

הגדרה 1.4 אורך של מסילה גזירה ברציפות:

$$\text{length}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

טענה 1.5 אם f רציפה על γ , שגזירה ברציפות, ונניח כי $\text{length}(\gamma) = L$, $|f|_{\gamma} \leq M$, אזי

$$\left| \oint_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = ML$$

דוגמא נניח כי f מוגדרת בתוך $\overline{B}(0, R)$, וחסומה על ידי M . אזי

$$\left| \oint_{\partial \overline{B}(0, R)} f(z) \, dz \right| \leq 2\pi R \cdot M$$

$$\left| \oint_{\partial \overline{B}(0, R)} \underbrace{\frac{f(z)}{z^n}}_{|z|=R} \, dz \right| \leq 2\pi R^{1-n} M$$

כעת:

$$\int_{S^1} z^n \, dz = \left[\begin{array}{l} z = e^{i\theta} \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right] = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} i e^{i\theta} \, d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\pi} \, d\theta = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

ואז

$$\int_{R \cdot S^1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i \, d\theta = 2\pi i$$

לבסוף, אם $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ מסילה כללית, אזי

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} d \log z = \log(\gamma(b)) - \log(\gamma(a))$$

נניח כי $\gamma(a) = \gamma(b)$. אזי המספר הזה הוא כפולה שלמה של $2\pi i$. אם $\varphi(t)$ היא עניף רציף של $\arg(\gamma(t))$ אזי

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \log(\gamma(b)) - \log(\gamma(a)) = i(\varphi(b) - \varphi(a))$$

הגדרה 1.6 האינדקס של מסילה סגורה γ ביחס לנקודה $z_0 \notin \text{Im } \gamma$ הוא: $\text{arg}(\gamma(t) - z_0)$, $\varphi(t)$ שהוא בחירה רציפה של $\arg(\gamma(t) - z_0)$ ואז האינדקס הוא

$$\text{Ind}_{z_0} \gamma = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$