

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

27 במרץ 2017

1 גזירות

פונקציה גזירה בנקודה z_0 אם היא בקירוב לינארית שם - כלומר אם קיים הגבול

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

נשים לב להבדל מדיפרנציאביליות כפונקציה $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ - העתקות לינאריות $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ זה מרחב ווקטורי ממשי ממימד 4. העתקות לינאריות מרוכבות $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ זה מרחב ווקטורי ממימד 2 מעל $\mathbb{C}$, או 2 מעל $\mathbb{R}$.

אם נכתוב $f = u + iv$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, אפשר לגזור רכיב רכיב ולקבל תנאים על הנגזרות החלקיות, לפי כך שהדיפרנציאל צריך להיות

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

קושי-רימן f גזירה בנקודה z_0 אם ורק אם $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ וכן

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

דרך נוספת לראות את המשוואות הללו - נתבונן בשינוי בכל ציר, ממשי ומרוכב:

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) &\approx f(z_0) + hf'(z_0) \approx f(z_0) + h(u_x + iv_x) \\ f(z_0 + ih) &\approx f(z_0) + ihf'(z_0) \approx f(z_0) + h(u_y + iv_y) \\ &\downarrow \\ u_y + iv_u &= i(u_x + iv_x) \end{aligned}$$

דוגמאות לפונקציות גזירות:

1. פונקציות קבועות, נגזרת 0.
2. הזהות, נגזרת 1.
3. פולינומים - נגזרת כמו בממשיים.
4. z^{-n} , גזירה בכל נקודה שאינה 0, נגזרת כרגיל.
5. e^z גזירה ונגזרתה היא עצמה. מכאן נקבל כי גם

$$\begin{aligned}\cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \sinh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\end{aligned}$$

גזירות.

פונקציה לא גזירה: $z \mapsto \bar{z}$, בממשיים

$$(x, y) \rightarrow (x, -y)$$

זו העתקה לינארית, והדיפרנציאל הוא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

וזה לא מקיים את משוואות קושי רימן באף נקודה. לכן זה לא גזיר באף נקודה. העתקות מוביזם תמיד גזירות, ומקיימות

$$\left(\frac{az+b}{cz+d} \right)' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

טענה 1.1 אם $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה, אזי f קבועה.

הוכחה: $f = u + iv$, $v = 0$, ולכן $v_x = v_y = 0$, כלומר גם $u_x = u_y = 0$ מקושי רימן. ■

1.1 ענפים של פונקציות

עניין רוצים להפוך את e^z , ולהגדיר $\log e^z$ כבר לא חד-חד-ערכית:

$$e^{x+iy} = e^{x+iy+2\pi ik}$$

לכן נגדיר

$$\log(z) = \{x + iy + 2\pi ik\} = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$$

ומתקיים

$$x = \log |z|$$

$$y = \arg z$$

ענף רציף לפונקציה מרובת ערכים g הוא פונקציה רציפה G על U שמוכלת בתחום ההגדרה של g , שמקיימת $G(z) \in g(z)$ לכל $z \in U$. למשל, ענף של הארגומנט:

$$\text{Arg}(z) = \arg(z) \cap (-\pi, \pi)$$

לכל $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. זה מגדיר ענף של הלוגריתם:

$$\log z = \log |z| + i\text{Arg}(z)$$

טענה 1.2 אין ענף רציף של $\arg$ על מעגל היחידה S^1 .

הוכחה: נניח שקיים ענף כזה f . נתבונן בקבוצות

$$U_1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in (-\delta, \pi + \delta)\}$$

$$U_2 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in (-\pi - \delta, \delta)\}$$

על U_1, U_2 קיימים ויחידים ענפים רציפים של $\arg$ שמקיימים $f_1(1) = f(1), f_2(1) = f(1)$ הם מהצורה

$$f_1(e^{i\theta}) = \theta$$

$$f_2(e^{i\theta}) = \theta$$

נקבל כי

$$\text{Im}(f_1 - f|_{U_1}) \subseteq \{2\pi k \mid k \in \mathbb{R}\}$$

זו פונקציה רציפה מהקבוצה U_1 לקבוצה בת מניה, ולכן היא קבועה, וקבועה על אפס כי היא משיגה את 0 בנקודה 1. אז קיבלנו

$$\begin{aligned} f_1 &= f|_{U_1} \\ f_2 &= f|_{U_2} \end{aligned}$$

כעת, $-1 \in U_1 \cap U_2$ ונקבל

$$-\pi = f_2(-1) = f(-1) = f_1(-1) = \pi$$

■

וזו בעיה.

בכל מקום שיש לנו ענף של $\log$ נקבל הגדרה של חזקה:

$$z^w = e^{w \log z}$$