

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

13 במרץ 2017

1 חזרה - מספרים מרוכבים

שדה המספרים המרוכבים:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

1.1 פעולות בסיסיות

יש חיבור וחסור:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

יש כפל:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

יש פעולת הצמדה:

$$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$$

ההצמדה מכבדת את הפעולות הקודמות:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \pm z_2} &= \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\end{aligned}$$

כמו כן מתקיים

$$z = a + bi \in \mathbb{R} \iff b = 0 \iff \bar{z} = z$$

יש נורמה (ערך מוחלט):

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}$$

מזדהה עם הנורמה האוקלידית של $\mathbb{R}^2$. כמובן, $|z|^2 = z\bar{z}$. הערך המוחלט כפלי:

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (zw)(\bar{z} \cdot \bar{w}) = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2 |w|^2$$

כמו כן, $0 \leq |z| \in \mathbb{R}$, וכן $z = 0 \iff |z| = 0$. לכן נוכל להגדיר חילוק:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}}$$

ערך ממשי ומדומה (הטלות): אם $z = a + bi$, אזי החלק הממשי של z הוא

$$\operatorname{Re}(z) = a = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

והחלק המדומה של z הוא

$$\operatorname{Im}(z) = b = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

כמובן, מתקיים

$$|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

1.2 אי שוויון המשולש

מהדבר האחרון נסיק את אי שוויון המשולש:

מסקנה 1.1 (אי שוויון המשולש) לכל שני מספרים מרוכבים z, w מתקיים

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} |z + w| &\leq |z| + |w| \iff \\ |z + w|^2 &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \iff \\ (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) &\leq z\bar{z} + w\bar{w} + 2|z||w| \iff \\ z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} &\leq z\bar{z} + w\bar{w} + 2|z||w| \iff \\ 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) &\leq 2|z||w| = 2|z\bar{w}| \end{aligned}$$

■

מסקנה 1.2 (זהות המקבילית) לכל שני מספרים מרוכבים z, w מתקיים

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 + |z - w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |z|^2 + |-w|^2 + 2\operatorname{Re}(z(-\bar{w})) = \\ &= 2|z|^2 + 2|w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) = 2(|z|^2 + |w|^2) \end{aligned}$$

■

תרגיל חשבו את

$$\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^{2017}$$

פתרון

$$\begin{aligned} \frac{2+i}{1-2i} &= \frac{(2+i)(1+2i)}{|1-2i|^2} = \frac{2-2+i+4i}{1^2+2^2} = \frac{5i}{5} = i \\ i^{2017} &= i^{2016} \cdot i = (i^4)^{504} \cdot i = 1^{504} \cdot i = i \end{aligned}$$

1.3 אקספוננט

מגדירים כך:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

מכאן מקבלים גם אקספוננט של מספר מרוכב:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

כאשר $r = e^x, \theta = y$

האקספוננט מכבד הצמדה:

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta = \overline{e^{i\theta}}$$

1.4 הצגה פולרית

כל $z \neq 0$ ניתן להציג בתור

$$z = re^{i\theta}$$

כאשר $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$ מתקיים

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}, \cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$$

אם מצמצמים את הזוויות האפשריות לקטע חצי סגור חצי פתוח באורך 2π מקבלים שהזווית θ יחידה.

כפל בהצגה פולרית נעשה פשוט מאוד:

$$\begin{aligned}(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ (re^{i\theta})^n &= r^n e^{in\theta}\end{aligned}$$

מסקנה 1.3 לכל $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$, $z^n = w$ קיים פיתרון למשוואה (אם $w \neq 0$ אז יש בדיוק n פתרונות).

הוכחה: אם $w = 0$ אזי $z = 0$ הוא פתרון. אחרת, נכתוב $w = r_0 e^{i\theta_0}$, $z = re^{i\theta}$. חייב להתקיים

$$r^n = r_0$$

שמגדיר את r ביחידות (כי הוא אי שלילי), וכן

$$e^{in\theta} = e^{i\theta_0}$$

כלומר מתקיים

$$n\theta = \theta_0 + 2\pi k$$

■

מה שנותן n פתרונות שונים.

דוגמא נפתור את $z^{2017} = 1 - i$. מתקיים

$$|1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\sin \theta_0 = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta_0 = -\frac{\pi}{4}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4 \cdot 2017} + \frac{2\pi k}{2017}, r = \sqrt[4034]{2}$$

2 טופולוגיה במרוכבים

הגדרה 2.1 נאמר כי סדרה $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{C}$ מתכנסת לגבול $z_0 \in \mathbb{C}$ אם

$$|z_n - z_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

התכנסות זו שקולה לשתי ההתכנסויות הבאות:

$$\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z)$$

$$\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$$

הגדרה 2.2 סביבה כדורית של $z_0 \in \mathbb{C}$ היא כדור פתוח מהצורה

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

כעת, $z_n \rightarrow z$ אם ורק אם לכל סביבה של z_0 , הסדרה מוכלת בה החלק ממקום מסויים.

הגדרה 2.3 קבוצה $X \subseteq \mathbb{C}$ נקראת פתוחה אם לכל $x \in X$ קיימת סביבה כדורית של x שמוכלת בתוך X . למשל - כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה. כדור סגור אינו קבוצה פתוחה (כל סביבה של כל נקודת שפה תכיל נקודות מחוץ לכדור).
קבוצה $X \subseteq \mathbb{C}$ נקראת סגורה אם $\mathbb{C} \setminus X$ פתוחה, שזה שקול לכך שלכל סדרה $\{z_n\} \subseteq X$ שמתכנסת לגבול $z \in \mathbb{C}$, מתקיים גם $z \in X$.

הגדרה 2.4 קבוצה $X \subseteq \mathbb{C}$ נקראת חסומה אם קיים $R > 0$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים

$$|x| < R$$

הגדרה 2.5 קבוצה $X \subseteq \mathbb{C}$ נקראת קומפקטית אם לכל $\{z_n\} \subseteq X$ קיימת תת סדרה $\{z_{n_k}\}$ שמתכנסת אל $z_0 \in X$. תנאי זה שקול לסגירות וחסיומת של הקבוצה.

הגדרה 2.6 תהי $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה מרוכבת ($U \subseteq \mathbb{C}$). נאמר כי f רציפה בנקודה z_0 אם לכל סדרה $\{z_n\}$ שמתכנסת אל z_0 , מתקיים

$$f(z_n) \rightarrow f(z_0)$$

דוגמאות

1. הפונקציה $z \mapsto e^z$ רציפה בכל נקודה.
2. פולינומים הם רציפים בכל נקודה.

3.

$$z \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{z}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

לא רציפה בנקודה 0 - ניקח את הסדרה $z_n = \frac{1}{n}$, אזי

$$f(z_n) = e^n \rightarrow \infty$$

אם ניקח את הסדרה $z_n = \frac{2}{2\pi n}i$, אזי

$$f(z_n) = e^{-2\pi n i} = 1$$

3 ספירת רימן

הגדרה 3.1 ספירת רימן היא

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

נגדיר כי $z_n \rightarrow \infty$ אם ורק אם $|z_n| \rightarrow \infty$, כלומר לכל סביבה $\mathbb{C}^* \setminus \overline{B(0, n)}$, הסדרה מוכלת בסביבה החל ממקום מסוים.

הגדרה 3.2 קבוצה $X \subseteq \mathbb{C}^*$ תיקרא פתוחה אם לכל נקודה $x \in X$ יש סביבה $x \in U \subseteq X$. זה שקול לפתיחות הרגילה של $X \cap \mathbb{C}$, יחד עם הדרישה שאם $\infty \in X$ אזי קיים n עבורו $\mathbb{C}^* \setminus \overline{B(0, n)} \subseteq X$.

קבוצה $X \subseteq \mathbb{C}^*$ תיקרא סגורה אם $\mathbb{C}^* \setminus X$ פתוחה, כלומר אם לכל $\{z_n\} \subseteq X$ שמתכנסת אל $z_0 \in \mathbb{C}^*$, מתקיים $z_0 \in X$. זה שקול לקומפקטיות סדרתית של X במובן הרגיל (לכל סדרה שמוכלת בקבוצה קיימת תת סדרה שמתכנסת לגבול בתוך הקבוצה). לכן יש שקילות לכך שהקבוצה X סגורה, במובן הרגיל, ואם היא לא חסומה, אז גם צריך שיתקיים $\infty \in X$.

הגדרה 3.3 פונקציה $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$, $(U \subseteq \mathbb{C}^*)$, כאשר U סביבה של z_0 , תיקרא רציפה בנקודה z_0 אם לכל $z_n \rightarrow z_0$ מתקיים $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

דוגמאות

1. אם $f(z) = c$ קבועה, נוכל להגדיר $f(\infty) = c$ ולקבל פונקציה רציפה.
2. אם f פולינום לא קבוע, אזי אם $z_n \rightarrow \infty$ גם $f(z_n) \rightarrow \infty$, ולכן נגדיר $f(\infty) = \infty$ ונקבל פונקציה רציפה.
3. עבור k אי שלילי ושלם, $f(z) = \frac{1}{z^k}$, כאשר $z_n \rightarrow 0$ מתקיים $f(z_n) \rightarrow \infty$, ואם $z_n \rightarrow \infty$ אזי $f(z_n) \rightarrow 0$, ולכן אם נגדיר כך בנקודות הבעייתיות נקבל פונקציה רציפה.

4. $f(z) = e^z$ - עבור $z_n = n$, נקבל $f(z_n) = e^n \rightarrow \infty$. אבל עבור $z_n = -n$, נקבל $f(z_n) \rightarrow 0$. לכן אין גבול בנקודה, ולא נוכל להגדיר שם את הפונקציה באופן רציף.

טענה 3.4 $f(z)$ רציפה בנקודה ∞ אם ורק אם $f\left(\frac{1}{z}\right)$ רציפה בנקודה 0.