

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

26 ביוני 2017

1 טורי לורן

נניח שיש לנו הטור

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

נדון בתחום ההתכנסות. הוא מתכנס בטבעת $A(0, r, R)$, עבור

$$R = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$
$$r = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|} \right)$$

משפט 1.1 אם f אנליטית בטבעת $A(0, r, R) \subseteq U$, אזי f ניתנת לפיתוח לטור לורן שמתכנס לפחות בטבעת $A(0, r, R)$. המקדמים הם

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

באשר $\text{Ind}_{\gamma}(0) = 1$.

התנהגות בסינגולריות מבודדת - אם f מוגדרת בסביבה מנוקבת של z_0 , כלומר בטבעת $A(z_0, 0, R)$ כלשהי, אזי

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

בטבעת הזו. אם החלק השלילי של הטור הוא אפס, הנקודה תהיה סינגולריות סליקה (והטור יהיה פשוט טור טיילור רגיל בכדור $(B_r(z_0))$). אם רק מספר סופי של מקדמים שליליים לא מתאפסים, הנקודה היא קוטב, שהסדר שלו הוא n , עבור n המקסימלי שמקיים $a_{-n} \neq 0$. אם יש אינסוף מקדמים שליליים שלא מתאפסים, הנקודה היא סינגולריות עיקרית. נוכל לדעת גם האם הנקודה היא סינגולריות אינטגרלית - זה שקול לכך שמתקיים $a_{-1} = 0$.

תרגיל תהא $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ אנליטית, ויהא $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. נניח כי לכל $r > 0$ מתקיים

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq r^\alpha$$

הוכיחו כי $f \equiv 0$.

פתרון f אנליטית בטבעת $A(0, 0, \infty)$, ולכן נפתח אותה לטור לורן:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

נחשב את המקדמים:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^n} \frac{dz}{z}$$

לכן

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_r(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^n} \left| \frac{dz}{z} \right| = \\ |a_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^n} \cdot i d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{r^n} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} r^{-n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{r^{\alpha-n}}{2\pi} \end{aligned}$$

כעת, $\alpha \notin \mathbb{Z}$, ולכן $\alpha - n \neq 0$. אם זה חיובי, אז $r^{\alpha-n} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. אם זה שלילי, $r^{\alpha-n} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. אבל קיבלנו כי $|a_n| \leq \frac{r^{\alpha-n}}{2\pi}$ לכל r , ולכן $a_n = 0$ לכל n . לכן $f = \sum 0z^n = 0$.

הערה 1.2 אם $\alpha \in \mathbb{Z}$ היינו מקבלים $f = cz^\alpha$.

תרגיל פתחו את $f = \frac{1}{1+z^2}$ לטורי לורן עם מרכז אפס בכל הטבעות הרלוונטיות.

פתרון הקטבים הם בנקודות $\pm i$. לכן יש טורי לורן בכדור $B_1(0)$ ובטבעת $A(0, 1, \infty)$. בתוך הכדור מתקיים

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

אפשר היה גם לכתוב

$$f(z) = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{z+i}$$

ולפתח לפי אלה. כעת, בטבעת $A(0, 1, \infty)$ נוכל לכתוב

$$\frac{1}{1-w} = \frac{\frac{1}{w}}{\frac{1}{w}-1} = -\frac{1}{w} \sum_{n=-\infty}^0 w^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} w^n$$

ומכאן בסך הכל, לכאורה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n = 0$$

כמובן שזה לא נכון, כי הטור הזה לא מתכנס בשום נקודה (וטור לורן הוא יחיד). בטבעת, קיבלנו

$$f = \frac{1}{1+z^2} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (-z^2)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} z^{2n}$$

תרגיל פתחו לטורי לורן:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

פתרון מתקיים

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z}$$

לגורם הימני יש פיתוחים בתחומים $B_1(0)$, $A(0, 1, \infty)$ ולשמאלי בתחומים $B_2(0)$, $A(0, 2, \infty)$. לכן נקבל שלושה תחומים: $B_1(0)$, $A(0, 1, 2)$, $A(0, 2, \infty)$. ראשית בכדור:

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

כעת בטבעת $A(0, 1, 2)$:

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n 2^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n \cdot \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & n \geq 0 \\ 1 & n < 0 \end{cases}$$

נותרה הטבעת $A(0, 2, \infty)$:

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n 2^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$