

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

19 ביוני 2017

1 סינגולריות, פונקציות מרומורפיות

הגדרה 1.1 נקודה z_0 תקרא סינגולריות מבודדת של f אם f מוגדרת ואנליטית ב- $B_r^*(z_0)$. יש שלושה סוגים:

1. סינגולריות סליקה, משמע

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$$

ניתן להמשיך במצב זה את f אנליטית בנקודה z_0 וניתן לכתוב $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ כאשר g אנליטית עם $g(z_0) \neq 0$ אם $n > 0$ אזי נאמר שלפונקציה f יש אפס מסדר n .

2. קוטב, משמע

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

אזי $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} g(z)$, כאשר g אנליטית עם $g(z_0) \neq 0$. נאמר כי z_0 הוא קוטב מסדר n של f .

3. סינגולריות עיקרית - הגבול לא קיים.

בנקודה $z_0 = \infty$ נאפיין את f לפי $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ בנקודה 0 (רק כאשר f מוגדרת בסביבה של אינסוף). אם יש סינגולריות סליקה או 0 אזי $f(z) = z^n h(z)$ עבור h רציפה באינסוף עם $h(\infty) \neq 0$. אם יש קוטב מסדר n אזי $f(z) = z^n h(z)$ גם כן.

דוגמאות

1. e^z - כל מה שצריך לבדוק זה אינסוף, ושם אין גבול (אפשר לשאוף למשל לאורך הממשיים החיוביים או הממשיים השליליים ולקבל שני גבולות שונים). לכן זו סינגולריות עיקרית.

2. $e^{\frac{1}{z}}$ - באפס יש סינגולריות עיקרית מהדוגמה הקודמת ומאידך שהגדרנו סינגולריות עיקרית. באינסוף יש סינגולריות סליקה (כי בסעיף הקודם הפונקציה הייתה מוגדרת באפס).

3. $\frac{1}{\sin z}$ - הסינגולריות הן בנקודות $\pi\mathbb{Z}$. אפשר לפתח לטור ולקבל

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots$$

ולכן נובע שיש קוטב פשוט בנקודה $z = 0$ (כדי לחשב את סדר הקוטב אפשר לחפש את החזקה השלילית המובילה בפיתוח). אותו טיעון מראה שיש קוטב פשוט גם בכל πn , שכן $\frac{1}{\sin(\pi n + z)} = \frac{(-1)^n}{\sin z}$. הפונקציה לא מוגדרת בסביבה של אינסוף, ולכן אין על מה לדבר.

הגדרה 1.2 f נקראת מרומורפית בתוך U אם היא מוגדרת בכל U למעט סינגולריות מבודדות מסוג קוטב.

טענה 1.3 אם f מרומורפית בכל $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ אזי $f = \frac{p(z)}{q(z)}$ רציונלית (p, q פולינומים).

זו הכללה של טענה שראינו - אם f אנליטית בכל $\mathbb{C}$ ויש לה גבול באינסוף (במובן הרחב) אזי f בהכרח פולינום (אם הגבול סופי היא בהכרח קבועה). **הוכחה:** f מרומורפית באינסוף, כלומר אינסוף היא סינגולריות מבודדת, ולכן כל הסינגולריות האחרות נמצאות בתוך כדור מסויים. לכן יש רק מספר סופי שלהן (כי זו קבוצה קומפקטית). נניח שאלה $p_1, \dots, p_n$ מסדרים $\mu_1, \dots, \mu_n$. אזי

$$g(z) = g(z) \prod_{i=1}^n (z - p_i)^{\mu_i}$$

היא אנליטית בכל $\mathbb{C}$. גם באינסוף $f(z) = z^m h(z)$ עבור $m \in \mathbb{Z}$ ולכן

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \begin{cases} \infty & m + \sum \mu_i > 0 \\ c < \infty & m + \sum \mu_i = 0 \\ 0 & m + \sum \mu_i < 0 \end{cases}$$

■

לכן מהתזכורת נקבל כי g פולינום, ולכן נסיים.

משפט 1.4 (עקרון הארגומנט - מוכלל) תהא f מרומורפית בתחום U , ותהי $\gamma \subseteq U$ מסילה סגורה ופשוטה הומולוגית (כלומר האינדקס של כל נקודה הוא 0 או 1) כך שלפונקציה f אין קטבים או אפסים על γ . אזי

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \text{Ind}(f \circ \gamma, 0) = N - P$$

כאשר N הוא מספר האפסים שם f בתוך התחום שאותו γ חוסמת, כולל ריבוי, וכן P הוא מספר הקטבים באותו תחום, כולל ריבוי.

הוכחה: נסמן $V = \{z \notin \text{Im} \gamma \mid \text{Ind}(\gamma, z) = 1\}$. נכתוב $V' = V \cup \text{Im} \gamma$, ואז $V' \subseteq U$, קומפקטית ולכן יש לפונקציה f מספר סופי של אפסים וקטבים בתוך V' (שכולם כמובן בתוך V). נסמן אותם: $z_1, \dots, z_n$ אפסים מסדר $\mu_1, \dots, \mu_n$, $w_1, \dots, w_m$ קטבים מסדר $\nu_1, \dots, \nu_m$. כעת אפשר לכתוב

$$f(z) = \frac{\prod_{i=1}^n (z - z_i)^{\mu_i}}{\prod_{i=1}^m (z - w_i)^{\nu_i}} g(z)$$

כאשר g אנליטית בכל V' ולא מתאפסת בו. כעת, נשתמש בעובדה שהנגזרת הלוגריתמית $\frac{f'}{f}$ היא אדיטיבית, משמע

$$\frac{(\varphi\psi)'}{\varphi\psi} = \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\psi'}{\psi}$$

וכן בעובדה

$$\frac{((z - z_i)^{\mu_i})'}{(z - z_i)^{\mu_i}} = \frac{\mu_i (z - z_i)^{\mu_i - 1}}{(z - z_i)^{\mu_i}} = \frac{\mu_i}{z - z_i}$$

ובסך הכל

$$\frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{z - z_i} - \sum_{i=1}^m \frac{\nu_i}{z - w_i} + \frac{g'}{g}$$

מכאן ברור שעבור $z \in V$ מתקיים

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z\right) = \begin{cases} \mu_i & z = z_i \\ -\nu_i & z = w_i \\ 0 & o/w \end{cases}$$

ולכן

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \sum \text{Res}(f, z) \text{Ind}(\gamma, z) = \sum \mu_i - \sum \nu_i = N - P$$

■

תרגיל אין f אנליטית בתחום $\overline{D}$ שמקיימת $|f - \frac{1}{z}| < 1$ לכל $|z| = 1$. זה נובע ממשפט רושה (במקרה המוכלל של המרומורפיות), שאומר שאם זה היה מתקיים אז היה לפונקציות $f, \frac{1}{z}$ את אותו ביטוי $N - P$. f אנליטית, ולכן אי לה קטבים, משמע $N - P \geq 0$, אבל $\frac{1}{z}$ לא מתאפסת ויש לה קוטב אחד, משמע $N - P = -1$.