

# תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

19 ביוני 2017

## 1 משפחות נורמליות ושקילות קונפורמית

**הגדרה 1.1** משפחה  $\mathcal{F}$  של פונקציות המוגדרות על  $U$  נקראת נורמלית אם לכל סדרה מתוכה יש תת סדרה שמתכנסת במידה שווה על קומפקטיות (אולי לאינסוף).

**משפט 1.2** (טענת מונטל) משפחה של פונקציות חסומות במידה אחידה היא נורמלית.

בדומה, גם אם לכל קומפקט יש חסם משלו על כל הפונקציות, המשפחה תהיה נורמלית.

**משפט 1.3** (משפט מונטל) משפחת הפונקציות שמפספסות את 0, 1 היא נורמלית.

**משפט 1.4** (למת זלצמן) אם  $\mathcal{F}$  לא נורמלית אז קיימים  $z_n \rightarrow z$  בתום  $U$ ,  $r_n \rightarrow 0$  ופונקציות  $f_n \in \mathcal{F}$  כך שמתקיים  $f_n(z_n + r_n z) \rightarrow f$  במידה שווה על קומפקטיות על  $\mathbb{C}$  לפונקציה  $f$  אנליטית לא קבועה.

**השערה** (ביברבך) נתבונן במשפחת הפונקציות  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  החד-חד-ערכיות שמקיימות  $f'(0) = 1, f(0) = 0$ . נכתוב

$$f(z) = \sum a_n z^n = 0 + z + \sum a_n z^n$$
$$\text{לכל } f \in \mathcal{F} \text{ אזי } |a_n| \leq n$$

השערה זו מוכחת, ונקראת היום משפט דה ברנז'ס.

**דוגמה** למשל  $f(z) = \frac{z}{(1-\lambda z)^2}$ ,  $|\lambda| = 1$ . למשל

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

וזו חד-חד-ערכית.

**הוכחה:** נוכיח שלכל  $n$  חייב להיות  $M_n$  עם  $|a_n| \leq M_n$  לכל  $f \in \mathcal{F}$ . נניח שלא, אזי קיים  $n$  וסדרה  $f_m$  כך שהסדרה  $f_m^{(n)}(0)$  לא חסומה, אזי לא ייתכן שיש תת סדרה מתכנסת בתוך  $\bar{B}_{\frac{1}{2}}(0)$ . מצד שני  $f_m(0) = 0$  ולכן לא תתכן תת סדרה שמתכנסת לאינסוף שם. לכן, אם נראה שהמשפחה נורמלית, נקבל סתירה.

**טענה 1.5** לכל  $f \in \mathcal{F}$  קיים  $|w| = 1$  עם  $w \notin \text{Im} f$ .

**הוכחה:** אחרת,  $\overline{D} \subseteq \text{Im} f$ , ולכן  $B_{1+\varepsilon}(0) \subseteq \text{Im} f$ . אזי  $|f(z)| \geq (1+\varepsilon)|z|$  לכל  $z \in D$ .  
 מהלמה של שורץ ההפוכה. אזי בהכרח  $|f'(0)| \geq 1+\varepsilon$  בסתירה. ■

כעת, תהא  $f_n \in \mathcal{F}$  סדרה כלשהי. קיימים  $|w_n| = 1$  שלא בתמונה של  $f_n$ . אזי  $f_n - w_n$  לא מתאפסת וחד-חד-ערכית.  $D$  הוא פשוט קשר ולכן יש  $g_n = \sqrt{f_n - w_n}$  וניתן להניח  $1 \notin \text{Im} g_n$  (על ידי החלפת סימן  $g_n$  אם צריך). אזי

$$g_n \in \{g : D \rightarrow \mathbb{C} \mid 0, 1 \notin \text{Im} g\}$$

ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת על קומפקטיות  $g_n \rightarrow g$  לא לאינסוף כי  $|g_n(0)| = 1$ . על ידי מעבר לתת סדרה ניתן להניח  $w_n \rightarrow w \in S^1$  וכעת  $f_n = g_n^2 + w_n \rightarrow g^2 + w$  במידה שווה על קומפקטיות. לכן  $\mathcal{F}$  נורמלית. ■

**משפט 1.6** (ההעתקה של רימן) כל תחום  $U \subsetneq \mathbb{C}$  פשוט קשר שקול קונפורמית אל  $D$  - יש העתקה  $f : U \rightarrow D$  חד-חד-ערכית ועל ואנליטית.

כמו כן, לכל  $w_0 \in U$  נוכל לדרוש  $f(w_0) = 0, f'(w_0) \neq 0$  ואז היא קיימת ויחידה.

**תזכורת** שקילויות קונפורמיות  $f : D \rightarrow D$  הן העתקות מוביוס  $\varphi_{\lambda, \mu}$ .

לכן, השקילויות  $f : U \rightarrow D$  הן  $\varphi_{\lambda, \mu} \circ f_0$ , השקילויות  $g : D \rightarrow V$  הן  $g_0 \circ \varphi_{\lambda, \mu}$ , השקילויות  $h : U \rightarrow V$  הן  $h_0 \circ \varphi_{\lambda, \mu} \circ f_0$  והשקילויות  $h : U \rightarrow U$  הן  $f_0^{-1} \circ \varphi_{\lambda, \mu} \circ f_0$ .

**דוגמאות** התחום  $\mathbb{H} = \{z \mid \text{Im}(z) > 0\}$  שקול אל  $D$  על ידי  $z \mapsto -\frac{iz+1}{z+i}$ . העתקות מוביוס ששומרות את  $\mathbb{H}$  הן  $\frac{az+b}{cz+d}$  עבור  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0$ .

יש לנו גם שקילויות קונפורמיות בין התחום שחסום על ידי קרניים בזווית  $\alpha$  אל  $\mathbb{H}$  על ידי  $z \mapsto z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ .