

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

5 ביוני 2017

משפט 0.1 (הלמה של שוורץ) תהי $f : D \rightarrow D$ גזירה עם $f(0) = 0$. אזי לכל $z \in D$ מתקיים $|f(z)| \leq |z|$, ואם יש שוויון עבור $z_0 \neq 0$ כלשהו אזי $f = \lambda z$ עבור $|\lambda| = 1$.

תרגיל נניח כי f כמו בלמה, אבל מתאפסת באפס מסדר $m \geq 1$. אזי $|f(z)| \leq |z|^m$ לכל $z \in D$, ואם יש שוויון עבור $z_0 \neq 0$ כלשהו אזי $f = \lambda z^m$ עבור $|\lambda| = 1$.

הוכחה: נתבונן בפונקציה $g(z) = \frac{f(z)}{z^m}$ עבור $z \neq 0$. היא בעלת סינגולריות סליקה בנקודה $z = 0$, ונמשיך אותה לפונקציה אנליטית שם. לכל $0 < r < 1$, מתקיים $|g(z)| \leq \frac{1}{r^m}$ על כל $z \in \partial B_r(0)$. מתוך עקרון המקסימום, נקבל $|g(z)| \leq \frac{1}{r^m}$ על כל $z \in \overline{B_r(0)}$. אזי לכל $z \in D$, עבור $|z| < r < 1$, מתקיים $|z| < r$ ולכן

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r^m} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 1$$

כלומר $|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z^m} \right| \leq 1$ לכל $z \in D$. אם היה שוויון בנקודה מסוימת $z_0 \neq 0$, היינו רואים $|g(z_0)| = 1$, וזה מקסימום מקומי (אפילו גלובאלי) של g על D , ולכן g קבועה - ולכן $f = \lambda z^m$ עם $|\lambda| = 1$. ■

תרגיל תהי $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ אנליטית וחד-חד-ערכית, עם $f(0) = 0$, $D \subseteq f(D)$. אזי $|f(z)| \geq |z|$ לכל $z \in D$, ואם יש שוויון בנקודה $z_0 \neq 0$ אזי $f(z) = \lambda z$ עבור $|\lambda| = 1$.

הוכחה: נסמן $U = f(D)$. אזי $g = f^{-1} : U \rightarrow D$ אנליטית, חד-חד-ערכית ועל. אזי $g|_D : D \rightarrow D$ אנליטית, $g(0) = 0$, ולכן מהלמה של שוורץ מתקיים $|g(z)| \leq |z|$ לכל $z \in D$. לכן $|w| \leq |f(w)|$ לכל $w \in g(D) = f^{-1}(D)$. עבור $w \notin f^{-1}(D)$, נקבל $f(w) \notin D$ כלומר $|f(w)| > 1$. וסיימנו. אם יש שוויון, אז הוא בהכרח עבור $w_0 = g(z_0)$, ולכן g לינארית - ומכאן שגם ההופכית שלה f . ■

מסקנה 0.2 אם $f : D \rightarrow D$ אנליטית, חד-חד-ערכית ועל עם $f(0) = 0$, אזי $f = \lambda z$ עבור $|\lambda| = 1$.

מסקנה 0.3 (הכללה של שוורץ) תהי $f : D \rightarrow D$ עם $f(a) = b$ עבור $a, b \in D$. אזי נסמן

$$\varphi_w(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \varphi_{\lambda,w}(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

כמו כן מתקיים $\varphi_w^{-1} = \varphi_{-w}$. נשים לב כעת שההעתקה

$$\varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a} : D \rightarrow D$$

מקבעת את 0, ולכן

$$|\varphi_b f \varphi_{-a}(z)| \leq |z|$$

נסמן $w = \varphi_{-a}(z)$ ונקבל

$$|\varphi_b f(w)| \leq |\varphi_a(w)|$$

ואם יש שוויון עבור $w \neq a$ אזי $\varphi_b f \varphi_{-a} = \varphi_{\lambda,0}$, ולכן $f = \varphi_{-b} \varphi_{\lambda,0} \varphi_a$ העתקת מוביוס.

משפט 0.4 (משפט פיקארד הקטן) אם $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ לא קבועה ואנליטית, אזי f מפספסת לכל היותר ערך אחד.

תרגיל יהי $p \in \mathbb{C}[z]$ פולינום. אזי מתקיים שלכל $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ אנליטית לא קבועה, $p \circ f$ על אם ורק אם $p(z) \neq a(z+b)^n + c$ עבור $n \geq 0, a, b, c \in \mathbb{C}$.

הוכחה: ראשית נניח כי $p(z) = a(z+b)^n + c$. נרכיב את p על $f(z) = e^z - b$ ונקבל

$$p \circ f(z) = a(e^z - b + b)^n + c = ae^{nz} + c$$

פונקציה זו כמובן לא מקבלת את הערך c (כי האקספוננט לא מתאפס) אלא אם $a = 0$ ואז היא קבועה. בכל מקרה היא לא על.

בכיוון השני, נניח כי $p(z) \neq a(z+b)^n + c$ אזי לכל $w \in \mathbb{C}$ מתקיים $|p^{-1}(w)| \geq 2$. נוכיח זאת: נניח שזה לא נכון, ויהי $w \in \mathbb{C}$ עם $|p^{-1}(w)| \leq 1$. לא קבוע, ולכן יש פתרון של $p(z) - w$. פתרון זה יחיד (מההנחה) ונסמנו z_0 . אזי $p(z + z_0) - w$ פולינום שמתאפס רק בנקודה 0, כלומר הוא מהצורה az^n . מכאן נקבל בסתירה $p(z) = a(z+b)^n + c$. לכן נוכל להניח שלכל $w \in \mathbb{C}$ יש לפחות שני מקורות. כעת, נראה כי $p \circ f$ על. יהי $w \in \mathbb{C}$ מתקיים $|p^{-1}(w)| \leq 2$, וממשפט פיקארד הקטן f לא יכולה לפספס את כל $p^{-1}(w)$ שבוטח שם. לכן $w \in \text{Im}(p \circ f)$. ■

משפט 0.5 (ארצלה-אסקולי) יהי $U \subseteq \mathbb{C}$ תחום, ויהיו $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ חסומות במידה אחידה, כלומר קיים M עם $|f_n| \leq M$, וכולן ליפשיץ עם קבוע L , משמע

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x - y|$$

אזי קיימת תת סדרה f_{n_k} שמתכנס במידה שווה על קומפקטיות בתוך U .

הוכחה: ראשית, תהי $X = \{x_n\} \subseteq U$ קבוצה צפופה ובת מנייה. אזי קיימת תת סדרה f_{n_k} עם $f_{n_k}(x_m) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_m$ לכל m (כלומר התכנסות נקודתית על X). זה דורש רק חסימות. כעת, עבור f_{n_k} כזו, יחד עם ליפשיציות נוכל להראות התכנסות במידה שווה על קומפקטיות. תהי K קומפקטית. ניקח כיסוי סופי עם כדורים $B(\alpha_i, \frac{\varepsilon}{6L})$. בכל כדור נוכל לבחור נקודה $x_{m_i} \in B(\alpha_i, \frac{\varepsilon}{6L})$. נבחר N גדול מספיק כך שהחל ממנו בתת הסדרה מתקיים לכל $k_1, k_2 > N$

$$|f_{n_{k_1}}(x_{m_i}) - f_{n_{k_2}}(x_{m_i})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

לכל i . לכל נקודה $x \in K$ קיימת x_{m_i} כלשהי עבור $|x - x_{m_i}| < \frac{\varepsilon}{3L}$, ולכן $|f_{n_j}(x_{m_i}) - f_{n_j}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. מכאן נוכל לקבל התכנסות במידה שווה של התת סדרה מתנאי קושי. ■