

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

23 באפריל 2017

1 תורת אינטגרציה של פונקציות גזירות על מסילות כלליות

הגדרה 1.1 מסילה היא פונקציה רציפה $\alpha : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{C}$, כאשר $U \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

הגדרה 1.2 חלוקה עם כיסוי קמור של מסילה α , עם $\text{Im} \alpha \subseteq U$, היא:

1. בחירה של כמות סופית של קבוצות קמורות $U_j \subseteq U$ כך שמתקיים $\text{Im} \alpha \subseteq \bigcup U_j$.
2. חלוקה של הקטע $[a, b] : \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$, כך שלכל i קיים j עבורו $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_j$.

נשים לב שלכל מסילה α קיימת חלוקה עם כיסוי קמור: ניקח $0 < \delta < \text{dist}(\text{Im} \alpha, U^c)$ מרציפות במידה שווה של α , קיים n עבורו אם $|t - s| \leq \frac{1}{n}$ אזי $|\alpha(t) - \alpha(s)| < \delta$. כעת, בלי הגבלת הכלליות, $[a, b] = [0, 1]$, וניקח $t_i = \frac{i}{n}$. נגדיר $U_j = B_\delta(\alpha(t_j))$. מייד לבדוק שזה מקיים את התכונות.

הגדרה 1.3 בהנתן f גזירה בתוך U , מסילה עם α , $\text{Im} \alpha \subseteq U$, וחלוקה עם כיסוי קמור של α , $\{U_j, t_i\}$, נגדיר את האינטגרל של f לאורך α :

$$\int_{\alpha} f dz := \sum_{i=0}^{n-1} F_{j(i)}(\alpha(t_{i+1})) - F_{j(i)}(\alpha(t_i))$$

כאשר F_j הנה פונקציה קדומה כלשהיא של f על $U_{j(i)}$ עבורו $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_{j(i)}$.

דוגמה ניקח $f = \frac{1}{z}$, α שהיא מעגל סביב 0. $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. ניקח ארבע נקודות, כל אחת ברביע אחר. בתור הקבוצות הקמורות ניקח חצאי מישור - העליון, התחתון, הימני והשמאלי. כך הסכום שלעיל למעשה יהפוך לחישוב האינטגרל על מסילה ריבועית סביב 0, שאותו כבר חישבנו - $2\pi i$.

כדי להראות שהגדרת האינטגרל תלויה רק במסילה α , ולא בבחירת החלוקה עם הכיסוי הקמור, מסתכלים על מושג ההעדנה של חלוקה.

הגדרה 1.4 יהיו $\sigma = \{t_i, U_j\}$, $\pi = \{s_k, V_m\}$ שתי חלוקות עם כיסוי קמור של המסילה α , כאשר $\text{Im} \alpha \subseteq U$. נאמר כי π היא העדנה של σ , אם לכל m קיים j עבורו $V_m \subseteq U_j$, וכן $\{s_k\}$ חלוקה של $[a, b]$ שמעדת את $\{t_i\}$.

טענה 1.5 1. אם $\pi \prec \sigma$ אזי חישוב האינטגרל של f על α לפי σ נותן את אותה תוצאה כמו החישוב לפי π .

2. לכל שתי חלוקות σ, τ עם כיסוי קמור של α , קיימת העדנה משותפת π .

הוכחה:

1. מסיק להוכיח את הטענה הזו בסיטואציה של $[t_i, t_{i+1}]$, כאשר $t_i = s_{i,1} < \dots < t_{i+1}$ מתקיים $s_{i,l} = t_{i+1}$ לכל i, l .

$$\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq W$$

כאשר W קמורה. לכן, ניתן לבחור בה פונקציה קדומה F של f , שתשמש אותנו בחישוב בכל הקטעים $[s_{i,k}, s_{i,k+1}]$. כעת השוויון הרצוי הופך להיות פשוט טור טלסקופי סופי.

2. מביטים בחיתוכים של הקבוצות הקמורות, והעדנה משותפת של החלוקות של הקטע.

■

הגדרה 1.6 עבור מסילה α וחלוקה עם כיסוי קמור שלה, מקבלים מסילה P פוליגונאלית, שקודקודיה הם $\{\alpha(t_i)\}$, כך שלכל פונקציה f גזירה, מתקיים

$$\int_{\alpha} f dz = \int_P f dz$$

כאשר האינטגרל על P הוא במובן שלמדנו בעבר. P כזו נקראת מסילה מקרבת את α .