

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

26 במרץ 2017

תזכורת $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ נקראת גזירה בנקודה z_0 אם קיים הגבול

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

והוא סופי. אז נסמנו כרגיל $f'(z_0)$.

דוגמא אם f רגולרית בנקודה $z_0 \in U$, אזי f גם גזירה שם.

הוכחה: נזכור שההגדרה של רגולריות אומרת כי לכל z

$$f(z + z_0) = f(z_0) + z^k \varphi(z)$$

כאשר $k \geq 1$ וכן

$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = a \neq 0$$

אזי

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z + z_0) - f(z_0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} z^{k-1} \varphi(z)$$

אגף ימין רציף מהנחתנו, ולכן קיים הגבול כאשר $z \rightarrow 0$, והוא שווה a אם $k = 1$,
ואחרת - 0. ■

נשים לב כי אם f גזירה בנקודה z_0 , $f'(z_0) \neq 0$, אזי f רגולרית שם מסדר $k = 1$ - נסמן

$$\varphi(z) = \frac{f(z + z_0) - f(z_0)}{z}$$

ואז הגבול באפס הוא $f'(z)$.

בהמשך יתברר לנו שכל עוד f אינה קבועה בסביבת z_0 , גם אם $f'(z_0) = 0$, היא עדיין רגולרית.

בשיעור שעבר ניתחנו את הפונקציה e^z , שהוגדרה לפי

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

וקיבלנו שהיא גזירה בכל המישור, עם

$$(e^z)' = e^z$$

נדון כעת בפונקציה ההפוכה - הלוגריתם. ניקח $w = re^{i\theta}$, וננסה למצוא את $z = x + iy$ שמקיים $e^z = w$. בבירור,

$$x = \log |w|$$

$$y = \arg w$$

הארגומנט נקבע רק מודולו 2π - כלומר עד כדי כפולות של 2π . כלומר, לכל $z \neq 0$, הארגומנט הוא קבוצת ערכים הנבדלים זה מזה בכפולות של 2π . נשים לב שלמעשה, e^z לא חד-חד-ערכית:

$$e^{z_1} = e^{z_2}$$

$$x_1 = x_2$$

$$y_1 - y_2 = 2\pi k$$

כאשר k שלם. לכן חושבים לרוב על הלוגריתם כפונקציה רב ערכית, המתאימה לכל z קבוצה של ערכים. אם נתבונן בשוויון

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$

למרות שבאופן גלובלי לא ברור איך להפוך את $\log$ לפונקציה חד-ערכית, אלא אם מבצעים בחירות "שרירותיות ולא עקביות". ישנם תחומים בתוך $\mathbb{C}$ בהם ניתן לעשות זאת (עם שרירותיות אבל גם בעקביות).

הגדרה 0.1 יהי $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ תחום. ענף של $\log$ על A הינו בחירה רציפה של ערכי $\log z$ על הקבוצה A . באופן דומה מוגדר גם ענף של $\arg$ על הקבוצה A .

נשים לב שבחירה של $\arg$ ושל $\log$ הן שקולות. ישנם תחומים בהם אי אפשר למצוא ענף שכזה - למשל המישור בלי הראשית.

משפט 0.2 נניח כי $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ (כאשר U תחום) וכן $g : V \rightarrow U$, ומתקיים

$$\forall z \in V \quad f(g(z)) = z$$

נניח כי g רציפה בסביבת z_0 , וכן f גזירה בסביבת $g(z_0)$, עם $f'(g(z_0)) \neq 0$. אזי g גזירה בנקודה z_0 ומתקיים

$$g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))}$$

הוכחה: עבור $h > 0, z_0$ קטן, מתקיים

$$z_0 + h = f(g(z_0 + h)) = f(g(z_0) + R_{g,z_0}(h)) \quad (1)$$

כאשר $R_{g,z_0}(h) = g(z_0 + h) - g(z_0)$. בהוכחה נרצה להראות כי כאשר $h \rightarrow 0$,

$$\frac{R_{g,z_0}(h)}{h} \rightarrow \frac{1}{f'(g(z_0))}$$

נשים לב כי $R_{g,z_0}(h) \neq 0$ כי אחרת $z_0 + h = z_0$. לכן נוכל בהמשך לחלק בו. נמשיך לפתח את שוויון (1) תוך שימוש בגזירות f :

$$(1) = \underbrace{f(g(z_0))}_{=z_0} + f'(g(z_0)) R_{g,z_0}(h) + o(R_{g,z_0}(h))$$

לכן נקבל בסך הכל:

$$h = f'(g(z_0)) R_{g,z_0}(h) + o(R_{g,z_0}(h))$$

נחלק כעת את שני האגפים בגודל $R_{g,z_0}(h)$:

$$\frac{h}{R_{g,z_0}(h)} = f'(g(z_0)) + \frac{o(R_{g,z_0}(h))}{R_{g,z_0}(h)}$$

מרציפות g נקבל כי כאשר $h \rightarrow 0$, גם $R_{g,z_0}(h) \rightarrow 0$, ואז נקבל, כאשר נשאיף $h \rightarrow 0$, בדיוק את מה שרצינו. ■

מסקנה 0.3 בתחום U בו ניתן לבחור את $\arg z$ באופן רציף, גזירה ומקיימת

$$(\log z)' = e^z$$

הוכחה: משתמשים במשפט הקודם עם $f(z) = e^z$, $g(z) = \log z$, שנבחרת באמצעות בחירה רציפה של ארגומנט, ואז

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))} = \frac{1}{e^{\log z}} = \frac{1}{z}$$

■ שהרי בכל נקודה $z, e^z \neq 0$.

מכאן למשל ברור למה לא ניתן לבחור את $\log$ רציפה בכל המישור המנוקב - נתבונן בפונקציה

$$\varphi(z) = \log(e^z)$$

גוזרים אותה, וממשיכים (נראה בתרגול).