

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

23 במרץ 2017

בשיעור שעבר ראינו את ההגדרה הבאה:

הגדרה 0.1 קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{C}$ נקראת פשוטת קשר מישורית אם לא קיים פירוק של U^c כאיחוד זר $U^c = F \cup K$, כאשר F סגורה, $K \neq \emptyset$ קומפקטית.

דוגמה $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אינה פשוטת קשר מישורית - $U^c = \emptyset \cup \{0\}$. לעומת זאת הפס

$$U = \{z \mid -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$$

כן פשוטת קשר מישורית - למרות שהמשלים שלה לא קשירה. כדי לדעת את זה, נראה משפט:

משפט 0.2 תהי U פתוחה ונניח כי

$$U^c = \bigcup_{\alpha} E_{\alpha}$$

כאשר כל E_{α} סגורה, לא קומפקטית וקשירה מסילתית. אזי U פשוטת קשר מישורית.

הוכחה: נניח כי

$$U^c = F \cup K$$

כאשר F סגורה, K קומפקטית, והאיחוד הוא זר. נוכיח כי $K = \emptyset$. נרשום

$$U^c = \left(\bigcup E_{\alpha} \right) \cap (F \cup K) = \bigcup (E_{\alpha} \cap F) \cup (E_{\alpha} \cap K)$$

כעת, לכל α , $E_{\alpha} = (E_{\alpha} \cap F) \cup (E_{\alpha} \cap K)$. כך הצגנו את E_{α} כאיחוד זר של שתי קבוצות סגורות. E_{α} סגורה וקשירה מסילתית, כלומר קשירה, ולכן נובע כי $E_{\alpha} \cap F$ או $E_{\alpha} \cap K$ ריקה, לכל α . כלומר, לכל α , $E_{\alpha} \subseteq F$ או $E_{\alpha} \subseteq K$. אם היה α עבורו $E_{\alpha} \subseteq K$, ולכן קומפקטית (סגורה ותת קבוצה של קומפקטית) בסתירה להנחה. לכן, לכל α , $E_{\alpha} \subseteq F$, כלומר

$$U^c = \bigcup E_{\alpha} \subseteq F$$

ולכן נובע $F = U^c$, $K = \emptyset$.

■

1 גזירות

הגדרה 1.1 תהי $U \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה, $z_0 \in U$. נאמר כי f גזירה בנקודה z_0 אם קיים הגבול הבא, ואינו אינסופי:

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

אם הגבול קיים, מסמנים אותו $f'(z_0)$.

דוגמא 1. $f(z) = z$ גזירה בכל $\mathbb{C}$. הגבול הוא 1.

הוכחות שזהות לחלוטין למקרה הממשי מראות כי הנוסחאות רגילות לנגזרת מתקיימות גם כאן - סכום, מכפלה, מנה (כשהמכנה לא מתאפס) והרכבה (כשהיא מוגדרת).

דוגמא 2. $f(z) = \bar{z}$ אינה גזירה. נבדוק את קיום הגבול:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

אם נשאף לאורך הציר הממשי, נקבל 1. לכן אם הגבול קיים הוא 1. אם נשאף לאורך הציר המדומה, נקבל -1, ולכן הגבול לא קיים, והפונקציה לא גזירה.

דוגמאות משפטים שנוכיח בעתיד:

1. אם $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה וחד-חד-ערכית אז $f(z) = az + b$.

2. אם $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה המקיימת

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

אזי f היא פולינום.

3. אם $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה, הטווח של f יכיל את כל $\mathbb{C}$, למעט אולי נקודה אחת.

שאלה די טבעית היא מה הקשר בין הזיגרות הזו לדיפרנציאביליות של פונקציות $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. ניזכור שאם $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ נקראת דיפרנציאבילית בנקודה $z_0 \in U$ אם קיימת טרנספורמציה לינארית $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ שמקרבת את השינוי של f סביבה z_0 - משמע מתקיימת תכונת הקירוב הלינארי:

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + T(h) + o(\|h\|)$$

כאשר

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} \rightarrow 0$$

ניזכר שכאן T , אם קיימת, היא יחידה - אם T_1, T_2 מקיימות את זה, אזי

$$(T_1 - T_2)(h) = o(\|h\|)$$

אבל טרנספורמציה לינארית שאינה טרנספורמצית האפס לא יכולה לקיים זאת - ניקח כיוון $v \neq 0$ שבו $(T_1 - T_2)v \neq 0$, ונגדיר $h = tv$, כאשר $t \rightarrow 0$. כך נקבל כי

$$\left\| S\left(\frac{tv}{\|tv\|}\right) \right\| = \|S(v)\| \neq 0$$

ולכן אין שאיפה לאפס. לכן $T_1 - T_2 = 0$, כלומר $T_1 = T_2$. נחזור להגדרת הגזירות המרוכבת. היא שקולה לתכונת הקירוב הלינארי, אבל בעזרת טרנספורמציה לינארית T בעלת אופי מאוד ספציפי: $T(h) = wh$ עבור $w \in \mathbb{C}$ כלשהו (כאשר מזהים את $\mathbb{R}^2$ עם $\mathbb{C}$ באופן הרגיל).

נרצה להבין מהן הטרנספורמציות הלינאריות שנראות כך. באופן שקול, נבין את המטריצות המייצגות שלהן. ניקח $w = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, ונמצא מטריצה המייצגת את טרנספורמצית הכפל פי w .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta y \\ \alpha y + \beta x \end{pmatrix}$$

$$ax + by = \alpha x - \beta y$$

$$cx + dy = \beta x + \alpha y$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

לסיכום, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה בנקודה $z_0 \in U$ אם ורק אם מתקיימת תכונת הקירוב הלינארי (כלומר היא דיפרנציאבילית כפונקציה $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) והדיפרנציאל הוא מהצורה שמצאנו.

דוגמא נשוב לדבר על ההצמדה. ההעתקה היא $(x, y) \rightarrow (x, -y)$. זו העתקה לינארית במרחב $\mathbb{R}^2$ (לא עבור $\mathbb{C}$). המטריצה של הדיפרנציאל היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

וזו לא מהצורה שמצאנו.

נחבר את הדיון לנגזרות חלקיות (במובן של חדו"א 2). ניזכר כי ביחס לבסיס הסטדנרטי, הייצוג של T מתכונת הקירוב הלינארי הוא על ידי מטריצת הנגזרות החלקיות, כלומר אם

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

אזי המטריצה המייצגת של T היא

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

נרצה שזו תהיה מהצורה שלעיל, כלומר

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \beta$$

מערכת זו נקראת משוואות קושי רימן.

סיכום אם $U \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in U$, אזי f גזירה בנקודה z_0 אם ורק אם

1. f דיפרנציאבילית בנקודה z_0 .

2. נשוואות קושי רימן מתקיימות, כאשר נסמן $f(z) = u(z) + iv(z)$.

במקרה ששני אלה מתקיימים נקבל

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}i = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}i$$

נזכרו כי דיפרנציאביליות מובטחת מהתנאי שהנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בסביבת נקודה.

דוגמא נביט בפונקציה $f(z) = e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$, כאשר $z = x + iy$. נבדוק שהפונקציה הזו גזירה במובן המרוכב. יש לבדוק למעשה רק את משוואות קושי רימן (הנגזרות החלקיות רציפות בכל מקום, כלומר f גזירה).

$$u(z) = u(x, y) = e^x \cos y$$

$$v(z) = v(x, y) = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

ואכן משוואות קושי רימן מתקיימות.

דוגמא נוספת:

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

ברור כי אם z ממשי זה מתלכד עם ההגדרה הממשית. זו מכפלה בקבוע של סכום של שתי פונקציות שכל אחת מהן הרכבה של שתי פונקציות גזירות, ולכן זו פונקציה גזירה. נגזור:

$$(\cos z)' = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = \frac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2}$$

אם נגדיר

$$\sin z := \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i}$$

זה שוב מתלכד עם ההגדרה הממשית, וכרגיל יתקיים

$$(\cos z)' = -\sin z$$

$$(\sin z)' = \cos z$$