

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

25 ביוני 2017

1 השלמה - שקילויות קונפורמיות

משפט 1.1 תהינה $T_{r_2, R_2}, T_{r_1, R_1}$ שתי טבעות (לא ודווקא עם אותו מרכז) במישור. הן שקולות קונפורמית אם ורק אם $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$ (ובמקרה זה נמייך את כל השקילויות).

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות, על ידי הזהב בקבוע, ניתן להניח שהמרכזים הם בראשית. כעת, על ידי כפל בקבוע נוכל להניח $r_1 = r_2 = 1$, ואז נותר להראות שקילות קונפורמית אם ורק אם $R_1 = R_2 = R$. ברור שאם זה מתקיים אז הן שקולות. יש להראות את הכיוון השני (אם נראה את זה ברור שהשקילויות יהיו פשוט מהטבעת לעצמה, כלומר $z \rightarrow \lambda z$ או $z \rightarrow \lambda \frac{R}{z}$ עבור $|\lambda| = 1$ - ומכאן אפשר לחשב את השקילויות בין כל שתי טבעות על ידי הוספת ההזזה והמתיחה). נרצה להוכיח שבמקרה שלנו של שתי טבעות, T_{1, R_1}, T_{1, R_2} , אם יש העתקה $f : T_{1, R_1} \rightarrow T_{1, R_2}$ שהיא הומיאומורפיזם (רציפה שההופכית שלה מוגדרת ורציפה), אז היא מקיימת אחת משתי אפשרויות:

1. תמיד $|z_i| \rightarrow 1$ אם ורק אם $|f(z_i)| \rightarrow 1$, וכן $|z_i| \rightarrow R_1$ אם ורק אם $|f(z_i)| \rightarrow R_2$.

2. תמיד $|z_i| \rightarrow 1$ אם ורק אם $|f(z_i)| \rightarrow R_2$, וכן $|z_i| \rightarrow R_1$ אם ורק אם $|f(z_i)| \rightarrow 1$.

כדי להוכיח את זה נגדיר את המשוג של שאיפה כיוונית לאינסוף:

הגדרה 1.2 תהי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה (אפשר לעשות דבר דומה בכל מימד) ותהי $\{z_i\} \subseteq U$ נגיד שהסדרה שואפת כיוונית לאינסוף בתוך U אם לכל קומפקט $K \subseteq U$ קיים N כך שלכל $n, m > N$, אפשר לחבר את z_n, z_m במסילה שאינה חותכת את K .

נגדיר יחס שקילות על סדרות ששואפות כיוונית לאינסוף: $\{z_i\} \sim \{w_i\}$ אם ורק אם לכל קומפקט K קיים N שלכל $m, n > N$ אפשר לחבר את z_n, w_m במסילה שלא חותכת את K . קל לראות שזו יחס שקילות. לכל מחלקת שקילות נקרא קצה של U . רואים בבירור, למשל, שלטבעת יש בדיוק שני קצוות - הקצה $|z_i| \rightarrow 1$, והקצה $|z_i| \rightarrow R$. כמו כן, כיוון שהמושג הוגדר במונחים של קומפקטיות ורציפות, כל הומיאומורפיזם בין קבוצות פתוחות משרה העתקה חד-חד-ערכית ועל בין הקצוות שלהן. כיוון ששקילות קונפורמית היא בפרט הומיאומורפיזם, הטענה שלנו נובעת (על המקרים האפשריים).

אנחנו סופסוף מוכנים להוכיח את המשפט. לפי מה שראינו עכשיו, אחת משתי האפשרויות מתקיימות. על ידי החלפת $f(z)$ עם $\frac{R}{f(z)}$, אם צריך, אפשר להניח שתמיד מתקיימת אפשרות 1 בלי הגבלת הכלליות. כעת, נוכיח כי $R_1 = R_2$, $f(z) = \lambda z$ (וזה יוכיח את כל מה שטענו בעבר). נגדיר $\alpha = \frac{\log R_2}{\log R_1} > 0$ ונביט בפונקציה הרציפה

$$\varphi(z) = \frac{|f(z)|}{|z|^\alpha}$$

זו רציפה על T_{1,R_1} ומתקיים שאם $|z_i| \rightarrow 1$ או $|z_i| \rightarrow R_1$ אזי $\varphi(z_i) \rightarrow 1$. כלומר, φ מתרחבת לפונקציה (ממשית וחיובית) רציפה על $\overline{T_{1,R_1}}$ שמקבלת את 1 בשפה. לכן, המינימום או המקסימום הגלובלי של φ על הקבוצה הקומפקטית הזו מתקבל בנקודה $z_0 \in U$. נחלק את T_{1,R_1} לאיחוד (לא זר!) של שני תחומים U_1, U_2 , כאשר כל אחד מהם לחוד הוא פשוט קשר (למשל שלושת הרבעים הימניים ושלושת הרבעים השמאליים של הטבעת), ונוכל לעשות זאת כאשר $z_0 \in U_1 \cap U_2$. על כל אחד מהם נוכל להגדיר את $\arg z$ באופן רציף, ולכן נוכל להגדיר עליו את z^α כפונקציה אנליטית, שנסמנה $g_i(z)$ על U_i . ננצל את חופש הבחירה בבחירת הארגומנט בנקודה אחת - z_0 - כך שנוכל להניח גם $g_1(z_0) = g_2(z_0)$. כעת נביט בפונקציה

$$\psi_i(z) = \frac{f(z)}{g_i(z)}$$

נשים לב שמתקיים $|\psi_i(z)| = \varphi_i(z)$. לכן נקבל כי z_0 היא מקסימום מקומי (או מינימום מקומי) של $\psi_i(z)$ בתחום $U_i(z)$ (וכמובן שהפונקציות הללו לא מתאפסות, כי הטווח של f הוא טבעת). מעקרונות המקסימום והמינימום, נקבל כי $\psi_i(z) = \lambda_i$ קבועות. נשים לב שמתקיים $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, שכן $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ לפי הבחירה שלנו. נשים לב שכמובן $|\lambda| = 1$. בסך הכל, קיבלנו $g_i(z) = \frac{f(z)}{\lambda}$, כלומר קיבלנו בחירה אנליטית של $z \mapsto z^\alpha$ בכל הטבעת. הוכחנו בעבר בתרגיל בית שזה לא אפשרי על אף מעגל סביב 0, אלא אם α שלם. במקרה שלנו α חיובי, ונקבל כי $f(z) = \lambda z^n$. כאשר $n \geq 2$, ההעתקה הזו לא חד-חד-ערכית, ולכן $n = \alpha = 1$. מכאן $R_1 = R_2 = R$ וכן $f(z) = \lambda z$ - סיימנו. ■