

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

2 ביולי 2017

1 המשכה אנליטית

הגדרה 1.1 תהי $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ אנליטית, ויהי $V \supseteq U$ תחום גדול יותר. פונקציה $F : V \rightarrow \mathbb{C}$ תקרא המשכה אנליטית של f בתחום V אם היא אנליטית ומקיימת $F|_U = f$.

הגדרה 1.2 לכל $z_0 \in \partial U$, נאמר כי z_0 רגולרית עבור f אם קיימת עבור f המשכה אנליטית בתחום $B_r(z_0) \cup U$. אחרת נאמר כי z_0 סינגולרית עבור f .

דוגמא נקח

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

הטור מתכנס על D , והפונקציה באגף ימין מהווה המשכה אנליטית שלו לכל $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. כאשר $z \rightarrow 1$ הפונקציה לא חסומה, ולא תתכן המשכה אנליטית לסביבה של 1, כלומר 1 היא סינגולרית, וכל $\partial D \setminus \{1\}$ רגולריות.

הערה 1.3 הנקודות הרגולריות של f מהוות קבוצה פתוחה (בתוך ∂D) והסינגולריות - סגורה.

הערה 1.4 המשכה אנליטית, אם קיימת, היא יחידה - שכן שתי פונקציות אנליטיות שמזדהות על קבוצה פתוחה הן שוות.

טענה 1.5 אם $f = \sum a_n z^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R , אזי קיימת $z_0 \in \partial B_R(0)$ סינגולרית.

הוכחה: נניח בשלילה שלא. אזי לכל $z_0 \in \partial B_R(0)$ קיימת המשעה אנליטית $F_{z_0}(z)$ שמוגדרת בתוך $U \cup B_{\varepsilon_0}(z_0)$ נגדיר

$$F(z) = \begin{cases} F_{z_0}(z) & z \in B_{\varepsilon_0}(z_0) \\ f(z) & z \in B_R(0) \end{cases}$$

כעת, כל שני כדורים $B_{\varepsilon_0}(z_0), B_{\varepsilon_1}(z_1)$ שנחתכים יתכו גם עם U , ולכן, אם נסמן

$$V = B_{\varepsilon_0}(z_0) \cap B_{\varepsilon_1}(z_1) \cap U \neq \emptyset$$

אזי מתקיים

$$F_{z_0}|_V = F_{z_1}|_V = f|_V$$

ולכן גם

$$F_{z_0}|_{B_{\varepsilon_0}(z_0) \cap B_{\varepsilon_1}(z_1)} = F_{z_1}|_{B_{\varepsilon_0}(z_0) \cap B_{\varepsilon_1}(z_1)}$$

לכן F מוגדרת היטב. כעת, F מוגדרת על קבוצה פתוחה שמכילה את $\overline{B}(0, R)$, כלומר על $B(0, R + \varepsilon)$, ולכן הטור הבא מתכנס ברדיוס $R + \varepsilon$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

■

בסתירה להנחה שרדיוס ההתכנסות של הטור הוא R .

דוגמא נגדיר

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

פונקציה זו מתכנסת בהחלט ובמידה שווה בכדור $\overline{B}(0, 1)$, אך $z = 1$ נקודה סינגולרית. זה ינבע מהטענה הבאה.

טענה 1.6 אם $\sum a_n z^n$ בעל רדיוס התכנסות 1 וכן $a_n \geq 0$ לכל n , אזי $z_0 = 1$ היא נקודה סינגולרית.

בשביל הטענה הזו נצטרך טענת עזר.

טענה 1.7 אם $\sum a_n z^n$ מתכנס ברדיוס 1, אזי $|z_0| = 1$ היא רגולרית אם ורק אם רדיוס ההתכנסות של

$$f\left(\frac{z_0}{2} + z\right) = \sum \frac{f^{(n)}\left(\frac{z_0}{2}\right)}{n!} z^n$$

הוא גדול מחצי.

הוכחה: אם הרדיוס גדול מחצי, אז אפשר להמשיך את f אל $B_r\left(\frac{z_0}{2}\right)$ על ידי טור חקות (וזו המשכה אנליטית כי הן מסכימות על $B_{\frac{1}{2}}(z_0)$). בכיוון השני, אם f אנליטית בתוך $U = B_1(0) \cup B_{\varepsilon}(z_0)$, אזי קיים $B_r\left(\frac{z_0}{2}\right) \subseteq U$ עם $r > \frac{1}{2}$, ולכן הרדיוס אכן גדול מחצי. ■

הוכחה: (של הטענה הקודמת) נראה שאם 1 רגולרית, אז גם כל $|z_0| = 1$ רגולרית, בסתירה לטענה קודמת.

נשים לב שמתקיים

$$f^{(n)}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} \underbrace{m \cdots (m-n+1)}_{\geq 0} a_m z^{m-n}$$

וזאת לכל n . מכאן

$$\left| f^{(n)}\left(\frac{z_0}{2}\right) \right| = \left| \sum m \cdots (m-n+1) a_m \left(\frac{z_0}{2}\right)^{m-n} \right| \leq \sum m \cdots (m-n+1) a_m 2^{n-m} = f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

כלומר, המקדמים של $\sum \frac{f^{(n)}(\frac{1}{2})}{n!} z^n$ חסומים על ידי המקדמים של $\sum \frac{f^{(n)}(\frac{z_0}{2})}{n!} z^n$. רדיוס ההתכנסות בנקודה $\frac{z_0}{2}$ הוא לפחות הרדיוס בנקודה $\frac{1}{2}$, שהוא גדול מחצי, כי 1 רגולרית. לכן גם z_0 רגולרית - והשגנו את הסתירה שרצינו. ■

דוגמא $f(z) = \sum z^{n!}$ - רדיוס ההתכנסות הוא 1, ולכן מהטענה 1 סינגולרית. נראה כעת שכל ∂D היא סינגולרית. יהא $\lambda \in \partial D$ שורש יחידה מסדר m . אזי

$$f(\lambda z) - f(z) = \sum (\lambda z)^{n!} - \sum z^{n!} = \sum_{n=0}^{m-1} (\lambda^{n!} - 1) z^{n!}$$

זהו פולינום - פונקציה שלמה, אנליטית בכל $\mathbb{C}$. לכן $f(z)$ ניתנת להמשכה אנליטית בנקודה z_0 אם ורק אם $f(\lambda z)$ ניתנת להמשכה אנליטית בנקודה z_0 , אם ורק אם $f(z)$ ניתנת להמשכה בנקודה $\frac{z_0}{\lambda}$. סינגולרית בנקודה $z_0 = 1$, ולכן גם בכל שורשי היחידה, שהם קבוצה צפופה בשפה, אבל קבוצת הנקודות הסינגולריות סגורה - ולכן כל ∂D סינגולריות.

הגדרה 1.8 במקרה שבו כל ∂U הן סינגולריות, נאמר כי ∂U היא הגבול הטבעי של f .

משפט 1.9 (פוליה - Polya) אם $\sum a_n z^n$ מתכנס ברדיוס 1, אז ניתן לבחור סימנים $\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ כך שהטור $\sum \varepsilon_n a_n z^n$ יהיה סינגולרי בכל השפה.

2 פונקציות הרמוניות

הגדרה 2.1 יהי $U \subseteq \mathbb{R}^2$. פונקציה $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ תקרא הרמונית בתחום U אם היא גזירה פעמיים ברציפות ומקיימת

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

האופרטור הזה נקרא לפלסיאן.

דוגמאות קבוע, $x, y, x^2 - y^2, 2xy$ וכדומה.

טענה 2.2 היא U תחום פשוט קשר. $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ היא הרמונית אם ורק אם קיימת $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ אנליטית עם $\text{Re} f = u$. אם יש כזו f , נכתוב $f = u + iv$, ונאמר כי v הצמודה ההרמונית של u (יחידה רק עד כדי קבוע).

הוכחה: נניח כי $f = u + iv$ אנליטית. אזי ממשוואות קושי רימן מתקיים

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

כעת

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

ולכן הלפליסיאן מתאפס.
בכיוון השני, נניח כי u הרמונית. נגדיר:

$$g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

בדיקה ישירה מראה שההרמוניות של u מבטיחה את קיום קושי רימן עבור פונקציה זו - לכן היא אנליטית. התחום U הוא פשוט קשר, ולכן קיימת f קדומה של g . נכתוב $f = u_0 + iv_0$, ומקשוי רימן נקבל

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v_0}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y}$$

לכן u, u_0 נבדלות בקבוע, ונוכל להזיז את f בקבוע הזה. ■

דוגמאות ראינו את $x^2 - y^2, 2xy$ נשים לב

$$x^2 - y^2 + 2xyi = (x + iy)^2$$

באופן כללי, $\operatorname{Re}(z^n), \operatorname{Im}(z^n)$ הן פונקציות הרמוניות ממעלה n . בנוסף, יש לנו הפונקציה $\log|z| = \operatorname{Re}(\log z)$ שהיא הרמונית בכל $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ - והיא ההרמונית היחידה שתלויה רק בערך המוחלט (רדיאלית). באופן כללי, אם f אנליטית ולא מתאפסת אזי $\log|f(z)| = \operatorname{Re}(\log(f(z)))$. גם $\arg$, בתחום שבו מצליחים להגדיר אותה, היא הרמונית.

משפט 2.3 (תכונת הערך הממוצע) נניח כי u הרמונית בתחום $B(z_0, R + \varepsilon)$. אזי

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$$

זה נכון גם אם u הרמונית רק בכדור $B_{z_0}(R)$ ורציפה על השפה.

הוכחה: נובע מנוסחת קושי. ניקח f אנליטית (ונניח $R = 1, z_0 = 0$). אזי

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z) \frac{dz}{z} = [z = e^{i\theta}] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) i d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

לכן הנוסחה נכונה גם לחלק ממשי ולחלק מדומה - וכל ונקציה הרמונית היא חלק ממשי פונקציה אנליטית (התחום הוא כדור, בפרט פשוט קשר). ■

מסקנה 2.4 (עקרום המינימום והמקסימום) אם u הרמונית מקבלת מקסימום (מינימום) בתוך U , אזי היא קבועה מקומית. לחילופין, המקסימום (מינימום) של u על K קומפקטית מתקבלים על ∂K .

הוכחה: אם z_0 מקסימום מקומי אז לכל r קטן מספיק מתקיים

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \leq u(z_0)$$

■ ולכן יש שוויון. מרציפות נקבל $u(z_0) = u(z_0 + re^{i\theta})$ לכל θ .

משפט 2.5 (נוסחת האינטרל של פואסון) אם u הרמונית בתוך D , ורציפה על ∂D , אזי לכל $w \in D$ מתקיים

$$u(w) = u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{i(\varphi-\theta)}}{1 - re^{i(\varphi-\theta)}} \right) d\theta$$

מסמנים

$$P_r(\varphi - \theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{i(\varphi-\theta)}}{1 - re^{i(\varphi-\theta)}} \right)$$

וזה נקרא גרעין פואסון.

הוכחה: נתחיל מנוסחת קושי:

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int f(z) \frac{z}{z-w} \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - w} d\theta \end{aligned}$$

אם נחליף את $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-w}$ בפונקציה $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-w} + g(e^{i\theta})$, כאשר g אנליטית עם $g(0) = 0$, הנוסחה עדיין תהיה נכונה (בגלל תכונת הערך הממוצע - האינטגרל ייתן $g(0)$). נרצה להפוך את הערך על השפה לממשי, ולכן נרצה לעשות את הדבר הבא:

$$\frac{z}{w-z} = 1 + \frac{w}{z-w}$$

ולכן נרצה לקחת את

$$1 + \frac{w}{z-w} + \frac{\bar{w}}{\bar{z}-\bar{w}}$$

זו לא אנליטית במשתנה z . נשים לב, עם זאת, שעל השפה מתקיים $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ולכן הגורם הימני הוא למעשה

$$\frac{z\bar{w}}{1-z\bar{w}}$$

זו כבר אנליטית במשתנה z . כעת על השפה (ולכן בתוך האינטגרל) מתקיים

$$1 + \frac{w}{z-w} + \frac{\bar{w}}{\bar{z}-\bar{w}} = \frac{1}{2} + \frac{w}{z-w} + \frac{1}{2} + \frac{\bar{w}}{\bar{z}-\bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{z+w}{z-w} + \frac{\overline{z+w}}{\overline{z-w}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{z+w}{z-w} \right)$$

■ ולכן קיבלנו את הזהות שרצינו עבור פונקציה הרמונית (חלק ממשי של אנליטית).

מסקנה 2.6 תהא $h : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. אזי

$$u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z) \operatorname{Re} \left(\frac{z+w}{z-w} \right) d\theta$$

כאשר $z = e^{i\theta}$, $z \rightarrow w$ כאשר $u(w) \rightarrow h(z)$ עם $|z|=1$.

הוכחה: נשים לב מהפיתוח שעשינו קודם שלמעשה

$$u = \frac{1}{2\pi} \int h \left(1 + \frac{w}{z-w} + \frac{\bar{w}}{\bar{z}-\bar{w}} \right) d\theta = f(w) + g(\bar{w})$$

כאשר w, f אנליטיות. כעת,

$$u = \operatorname{Re}(u) = \operatorname{Re}(f(w)) + \operatorname{Re}(g(\bar{w})) = \operatorname{Re}(f(w)) + \operatorname{Re}(\overline{g(\bar{w})})$$

■

וזה סכום של הרמוניות.

טענה 2.7 אם u מקיימת את תכונת הערך הממוצע אזי u הרמונית.

הוכחה: ניתן להגדיר $\tilde{u}$ שמשכימה עם u על השפה של $B_r(z_0)$, והרמונית בפנים. $u, \tilde{u}$ מקיימות את תכונת הערך הממוצע, ולכן גם $u - \tilde{u}$. לכן פונקציה זו מקיימת את עקרון המינימום (והמקסימום) - אבל היא מתאפסת על השפה, ולכן היא חייבת להתפאס גם בכל הפנים. לכן u הרמונית. ■