

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

4 ביוני 2017

1 משפט פיקארד

אנחנו הולכים להתחיל לעבוד, כדי להוכיח את המשפט המדהים הבא:

משפט 1.1 (פיקארד) תהי f שלמה ולא קבועה. אזי הטווח שלה הוא $\mathbb{C}$ או $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ עבור $z_0 \in \mathbb{C}$ (כלומר f מפספסת לכל היותר ערך אחד).

לשם זה נצטרך כמה הכנות.

תזכורת תחום U נקרא פשוט קשר לפונקציות אם לכל f אנליטית על U יש פונקציה קדומה. בפרט, ממשפט גורסה, כל תחום קמור הוא כזה, ועוד יותר בפרט, המישור $\mathbb{C}$ הוא כזה.

משפט 1.2 אם f אנליטית על U שהוא פשוט קשר לפונקציות, ואינה מתאפסת שם, אזי ניתן להגדיר את $\log f$ אנליטית על U .

הוכחה: נביט בפונקציה $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. φ אנליטית כי f לא מתאפסת על U , ולכן מההנחה על U , קיימת h אנליטית על U המקיימת $h(z) = \varphi(z)$. נחשב את הנגזרת של הפונקציה

$$g(z) = e^{-h(z)} f(z)$$

ונקבל

$$\begin{aligned} g'(z) &= -h'(z) e^{-h(z)} f(z) + e^{-h(z)} f'(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)} e^{-h(z)} f(z) + e^{-h(z)} f'(z) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

אם כן, היות והתחום U קשיר, נקבל $g(z) = C$ קבועה. נסמן $C = e^\alpha$. אזי

$$\begin{aligned} e^{-h(z)} f(z) &= e^\alpha \\ f(z) &= e^{h(z)+\alpha} \end{aligned}$$

■ ולכן $h(z) + \alpha$ הוא לוגריתם כמו שרצינו.

העובדה שמקומית ניתן להגדיר את $\log f$ אנליטית היא כללית ולא קשורה להנחה על U .

בפרט לתחום U יש את תכונות השורש הריבועי - לכל $f \neq 0$ אנליטית על U ניתן להוציא שורש אנליטי של f , כי

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \log(z)}$$

משפט 1.3 (לנדאו בלוך) קיים קבועה אבסולוטי C (ואנחנו נראה אפילו $C \geq \frac{1}{40}$) כך שלכל פונקציה f שהיא אנליטית בסביבה של $\overline{D} = \overline{B}_1(0)$ המקיימת $|f'(0)| = 1$, הטווח $f(D)$ מכיל כדור ברדיוס לפחות C .

את המשפט הזה נוכיח בשיעור הבא. בינתיים נשתמש בו קצת.

מסקנה 1.4 נניח כי f שלמה ולא קבועה. אזי הטווח של f מכיל כדורים ברדיוס גדול כרצוננו (במרכזים שונים בדרך כלל).

הוכחה: מכיוון שהפונקציה f אינה קבועה, קיימת נקודה $a \in \mathbb{C}$ עם $f'(a) \neq 0$. יהי $R > 0$, גדול כרצוננו, ונביט בפונקציה

$$g(z) = \frac{f(a + Rz)}{Rf'(a)}$$

שמקיימת

$$g'(0) = \frac{Rf'(a)}{Rf'(a)} = 1$$

היא כמובן אנליטית בכל $\mathbb{C}$, ולכן ממשפט לנדאו בלוך התמונה של g מכילה כדור ברדיוס לפחות C . לכן הטווח של f מכיל כדור ברדיוס לפחות $C \cdot R \cdot f'(a)$, שיהיה גדול כרצוננו. ■

הוכחה: (של משפט פיקארד בהינתן משפט לנדאו בלוך) ניקח f שלמה ונניח בשלילה שהיא מפספסת 2 ערכים $a \neq b$. נפעיל עליה פעולות כמו $\log$ כך שנקבל פונקציות שלמות שמפספסות יותר ויותר ערכים, עד שנקבל סתירה למסקנה של משפט לנדאו בלוך. במהלך כל ההוכחה הזו נעבוד עם פונקציות לא קבועות, בגלל שהפונקציה f לא קבועה, ולא נציין זאת כל הזמן.

ראשית, בלי הגבלת הכלליות, f מפספסת את $0, 1$ - אחרת ניקח במקום את $\frac{f(z)-a}{b-a}$. כעת, $\mathbb{C}$ פשוט קשר לפונקציות, ולכן יש $\varphi(z) = \log f(z)$, כלומר

$$e^{\varphi(z)} = f(z)$$

על כן φ מפספסת את כל הערכים $2\pi i k$, כאשר k שלם, כי f מפספסת את 1. אחרי חלוקת φ בקבוע נוכל להניח כי φ מפספסת את כל השלמים. עדיין, φ מפספסת את $0, 1$, ולכן $\sqrt{\varphi(z)}$, $\sqrt{\varphi(z)-1}$ גם כן ניתנות להגדרה כפונקציות שלמות. לכן, נוכל להגדיר

$$h(z) = \sqrt{\varphi(z)} - \sqrt{\varphi(z)-1}$$

ונשים לב שהפונקציה כזו מפספסת כל ערך מהצורה $\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1}$ עבור n טבעי -
נניח שמתקיים

$$\sqrt{\varphi(z)} - \sqrt{\varphi(z) - 1} = \sqrt{n} \pm \sqrt{n-1}$$

ניקח הופכי ונקבל

$$\sqrt{\varphi(z)} + \sqrt{\varphi(z) - 1} = \sqrt{n} \mp \sqrt{n-1}$$

נחבר את שני השוויונות האלה ונקבל

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\varphi(z)} &= 2\sqrt{n} \\ \varphi(z) &= n \end{aligned}$$

וזו סתירה. כמובן, גם $h(z)$ לא מתאפסת, כי אחרת נקבל

$$\begin{aligned} \sqrt{\varphi(z)} &= \sqrt{\varphi(z) - 1} \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

וזו כמובן סתירה. לכן, נוכל להגדיר שוב $g(z) = \log h(z)$ שלמה. נוכיח כי סותרת את המסקנה האחרונה. g מפספת את כל הערכים מהצורה

$$2\pi ik + \log(\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1})$$

לכל $n \geq 1$ טבעי, k שלם (הלוגריתם הזה הוא ממשי). נביט בנקודות הממשיות $\log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$. נקודות אלה גדלות מונוטונית לפי n . נראה שההפרשים של כל שתי נקודות כאלה הם חסומים:

$$\begin{aligned} \log(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) &= \log\left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}\right) < \\ &< \log\left(\frac{2\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n-1}}\right) < \\ &< \log\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \log\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \leq \log 3 \end{aligned}$$

לכן ההפרשים בין הערכים הממשיים שמתקבלים בציר החיובי חסומים על ידי $\log 3$. בציר הממשי השלילי יש לנו את אותה תמונה, כאשר עובדים עם הנקודות בסימן מינוס. לכן גם שם מקבלים ממשיים שליליים בהפרשים לכל היותר $\log 3$. קיבלנו כך קבוצת ערכים מפוספסים שמרחק מכל מספר מרוכב הוא לכל היותר 10. זה כמובן סותר את המסקנה - אי אפשר לקחת כדור ברדיוס יותר מאשר 10. ■