

תורת הפונקציות המרוכבות 1

© ארזים

1 ביוני 2017

1 פונקציות אנליטיות

בשיעור האחרון ראינו את משפט קזוראטי ווירשטראס. נראה מסקנה יפה וקלה:

מסקנה 1.1 תהי f פונקציה שלמה (אנליטית בכל $\mathbb{C}$) וחד-חד-ערכית. אזי $f(z) = az + b$ עבור $a \neq 0$.

הוכחה: נוכיח שעבור f כזו, במשפט קזוראטי ווירשטראס עבור $z_0 = \infty$ אנחנו בהכרח באפשרות הראשונה (קיום הגבול). אחרת, נניח בשלילה שהתנאי השני מתקיים. אזי נובע כי $f(\{|z| > 2\}) = A$ קבוצה צפופה בתוך $\mathbb{C}$. מצד שני, $f(\{|z| < 1\}) = V$ היא קבוצה פתוחה, ממשפט ההעתקה הפתוחה (f אנליטית לא קבועה ולכן רגולרית). מההגדרה מתקיים $A \cap V \neq \emptyset$ וזו סתירה לחד-חד-ערכיות - אלה תמונות של קבוצות זרות. כלומר, קיים הגבול

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$$

אם גבול זה סופי, אז f חסומה על כל $\mathbb{C}$ וממשפט ליוביל קבועה, בסתירה לחד-חד-ערכיות. לכן הגבול הוא אינסופי, וראינו שבמצב זה נקבל $f(x) = p(x)$ פולינום. נשאר לתרגיל את העובדה שפולינום חד-חד-ערכית הוא בהכרח לינארי. ■

הוכחנו בשיעור שעבר שאם $f_n \rightarrow f$ במידה שווה על קומפקטיות, אז אם f_n אנליטיות גם f אנליטית (כמסקנה ממשפט מוררה). נחזק זאת:

משפט 1.2 (ווירשטראס) בסיטואציה הזו, מתקיים גם $f'_n \rightarrow f'$ במידה שווה על קומפקטיות, וכך גם לנגזרות מסדר גבוה יותר (באינדוקציה).

הוכחה: ראשית, נעיר עובדה כללית - התכנסות במידה שווה על קומפקטיות נובעת מהתכנסות במידה שווה מקומית: אם לכל $z \in U$ יש סביבה שבה $f_n \rightarrow f$ במידה שווה, אזי $f_n \rightarrow f$ במידה שווה על קומפקטיות בתוך U (היה בשיעורי בית). לפי זה, בהינתן $z_0 \in U$, נרצה למצוא סביבה שלה שבה $f'_n \rightarrow f'$ במידה שווה. יהי $R > 0$ כך שמתקיים $\overline{B}_R(z_0) \subseteq U$. יהי $0 < r < R$ ונוכיח התכנסות במידה שווה על $\overline{B}_r(z_0)$. לשפת הכדור ברדיוס R נקרא γ_R . מנוסחת קושי לנגזרת:

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw$$

וכך גם אם נכתוב f במקום f_n . כעת, נסמן

$$\varepsilon_n = \sup_{z \in \overline{B}_R(z_0)} |f(z) - f_n(z)|$$

מהנתון $\varepsilon_n \rightarrow 0$, נוכל להעריך בכדור $B_r(z_0)$:

$$|f'_n(z) - f'(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_R} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq R \cdot \frac{\varepsilon_n}{(R-r)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

■

ולכן סיימנו.

1.1 ניתוח המבנה המקומי של פונקציה אנליטית

ראינו בעבר את עקרונות ההעתקה הפתוחות, המקסימום והמינימום (כאשר f לא קבועה). נניח כי f אנליטית בסביבת z_0 , ונניח בשלב ראשון כי $f'(z_0) \neq 0$. נוכיח שבמקרה זה יש סביבה של z_0 שבה f חד-חד-ערכית (נובע מעובדה כללית מחדוא 3, אבל נוכיח ישירות). נניח בשלילה כי f אינה חד-חד-ערכית באף סביבה של z_0 , כלומר קיימות $z_n, w_n \rightarrow z_0$ עם $f(z_n) = f(w_n)$ לכל n . בתרגיל בית, ראינו את משפט לגראנז' למקרה המרוכב: לכל z, w קיימים $a, b \in [z, w]$ כך שמתקיים

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \operatorname{Re}(f'(a)) + i \operatorname{Im}(f'(b))$$

נפעיל זאת עבור $z = z_n, w = w_n$ ונקבל $a_n, b_n \rightarrow z_0$ עבור

$$\operatorname{Re}(f'(a_n)) + i \operatorname{Im}(f'(b_n)) = 0$$

מרציפות הנגזרת (אנליטית) ומרציפות ההטלה לצירים, נובע כי

$$\operatorname{Re}(f'(z_0)) = \operatorname{Im}(f'(z_0)) = 0$$

בסתירה להנחה. כעת נעבור לנתח את המקרה הכללי. לצורך הדיון שלנו נניח בלי הגבלת הכלליות כי $z_0 = 0$, על ידי החלפת $f(z)$ עם $g(z) = f(z + z_0)$. כמו כן, נוכל להניח $f(0) = 0$, על ידי החלפת $f(z)$ עם $h(z) = f(z) - f(0)$. כעת, f מוגדרת בסביבת 0 ומתאפסת שם. נכתוב

$$f(z) = z^k \varphi(z)$$

הכתיבה של f כפונקציה רגולרית, ונרשום

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

עם $a_0 \neq 0$, $k \geq 1$ הוא סדר ההתאפסות של הנגזרת - $k-1$ הנגזרות הראשונות של f מתאפסות והנגזרת מספר k - לא. φ לוקחת סביבה של 0 לתוך סביבה של $a_0 \neq 0$, ואם

נבחר סביבה מספיק קטנה אז נוכל להוציא בסביבה הזו של a_0 שורש מסדר k (אנליטי) - שכן ראינו שבכדור שלא מכיל את 0 אפשר להגדיר ארגומנט, ולכן לוגריתם, ולכן

$$\sqrt[k]{w} = e^{\frac{1}{k} \log w}$$

לכן בסביבה קטנה מספיק של 0 אפשר למצוא ψ אנליטית עם $(\psi(z))^k = \varphi(z)$ באותה סביבה. נוכל לרשום

$$f(z) = z^k \varphi(z) = z^k \psi^k(z) = (z\psi(z))^k$$

נשים לב כעת כי הפונקציה $z \mapsto z\psi(z)$ היא בעלת נגזרת שונה מאפס בנקודה $z=0$, כי

$$(z\psi(z))' = \psi(z) + z\psi'(z)$$

ובנקודה 0 נקבל $\psi(0)$, שהוא שורש מסדר k של $a_0 \neq 0$, ולכן לא אפס. לכן $z\psi(z)$ היא חד-חד-ערכית בסביבה של $z=0$. לכן, את f נוכל לתאר בתור הרכבה - ראשית ההעתקה החד-חד-ערכית $z \mapsto z\psi(z)$, ואז ההעתקה $w \mapsto w^k$ שהיא k -חד-חד-ערכית (כלומר לכל תמונה יש k מקורות בדיוק). בפרט, נקבל:

מסקנה 1.3 אם f חד-חד-ערכית בתחום U , אזי בכל נקודה $z \in U$ מתקיים $f'(z) \neq 0$. בנוסף, הפונקציה ההפוכה $g = f^{-1}$ בהכרח גם אנליטית (מוגדרת על $f(U)$).

הוכחה: לגבי התאפסות הנגזרת: אחרת $k > 1$ ואז אין חד-חד-ערכיות בהעלאה בחזקת k . כעת, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ חד-חד-ערכית ואנליטית. ידוע כי $f(U) = V$ פתוחה. נזכור שהוכחנו כשדיברנו לראשונה על גזירות של פונקציות מרוכבות שאם $g \circ f = \text{Id}$, $g'(z_0) \neq 0$ אזי

$$g'(z_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

במקרה שלנו, f העתקה פתוחה, ולכן $g = f^{-1}$ רציפה (עובדה כללית שנובעת ממהגדרות ולא קשורה לגזירות). התנאי $f' \neq 0$ מתקבל אוטומטית, בגלל החלק הראשון. ■

משפט 1.4 (הלמה של שוורץ) יהי $D = B_1(0)$ ותהי f אנליטית על D , שמקיימת $|f(z)| \leq 1$ לכל $z \in D$ וכן $f(0) = 0$ אזי:

1. לכל $z \in D$ מתקיים $|f(z)| \leq |z|$, ואם יש $z \in D$ $z \neq 0$ המקיים $|f(z)| = |z|$ אזי $f(z) = \lambda z$, עבור $|\lambda| = 1$.
2. מתקיים $|f'(0)| \leq 1$, ואם מתקיים שוויון אזי $f(z) = \lambda z$, עבור $|\lambda| = 1$.

הוכחה:

1. ראשית, היות ומתקיים $f(0) = 0$ נכתוב $f(z) = z\varphi(z)$ עבור φ אנליטית (לאו דווקא עם $\varphi(0) \neq 0$). נתון כי $|f(z)| \leq 1$, כלומר עבור $z \neq 1$ נקבת

$$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{|z|}$$

יהי $r < 1$, ונפעיל את עקרון המקסימום עבור φ בעודר $B_r(0)$ - נקבל שהמקסימום של φ מתקבל על שפת הכדור $\{|z| = r\}$. על שפה זו מתקיים $|\varphi(z)| \leq \frac{1}{r}$. ניקח $r \rightarrow 1$ ונקבל כי לכל $z \in D$ מתקיים $|\varphi(z)| \leq 1$, ומכאן

$$|f(z)| = |z\varphi(z)| \leq |z|$$

כעת נניח שיש $z_0 \neq 0$ עבורו יש שוויון. על כן נקבל

$$|\varphi(z_0)| = 1$$

מעקרון המקסימום, היות וקיבלנו מקסימום של φ בתוך הכדור (ראינו כבר $|\varphi(z)| \leq 1$), בהכרח $\varphi = \lambda$ קבועה (ובגלל השוויון בנקודה z_0 ברור כי $|\lambda| = 1$) ולכן

$$f(z) = \lambda z$$

2. נשים לב שמתקיים

$$f'(z) = \varphi(z) + z\varphi'(z)$$

ובפרט

$$f'(0) = \varphi(0)$$

ידוע לנו כבר שמתקיים $|\varphi| \leq 1$ ולכן נקבל את אי השוויון שרצינו. אם מתקיים שוויון, נקבל את אותה מסקנה באותה צורה - עקרון המקסימום.

■

משפט 1.5 נניח כי $f : D \rightarrow D$ אנליטית חד-חד-ערכית ועלץ אזי $f(z) = \lambda\varphi_a(z)$, עבור

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

כאשר $|\lambda| = 1$ וכן $a \in D$.

הוכחה: ראשית נוכיח את הטענה תחת ההנחה הנוספת $f(0) = 0$. כעת, אנו עומדים בתנאי הלמה של שורץ, כלומר נקבל $|f(z)| \leq |z|$ לכל $z \in D$. כעת ניקח $g = f^{-1}$, שהיא גם אנליטית, ונקבל

$$|w| \leq |g(w)|$$

כעת נוכל להפעיל את הלמה של שורץ גם על g , ולקבל את אי השוויון ההפוך, כלומר $|w| = |g(w)|$, משמע $g(z) = \lambda z$ עם $|\lambda| = 1$. בבירור, מכאן מתקיים $f = \lambda^{-1}z$, וכעת $|\lambda^{-1}| = 1$ וכן

$$z = \varphi_0(z)$$

ולכן סיימנו את המקרה הפרטי הזה.
 במקרה הכללי, נסמן a את הנקודה שעוברת אל 0 , כלומר $f(a) = 0$ (קיימת כי f על).
 בתרגיל הבית הראשון בקורס, ראינו שכל φ_a (העתקת מוביוס) היא חד־חד־ערכית ועל D .
 ראינו גם כי

$$\varphi_{a^{-1}} = (\varphi_a)^{-1}$$

כעת נביט בפונקציה $g = f \circ \varphi_a^{-1}(z)$ זוהי הרכבה של שתי פונקציות חד־חד־ערכיות
 ועל, ולכן היא אכזר בעצמה, וכן $g(0) = 0$. מהמקרה הפרטי נקבל $g(z) = \lambda z$ עבור $|\lambda| = 1$.
 לכן

$$f = \lambda \cdot \varphi_a(z)$$

■

וסיימנו.